INSTITUZIONI
ANALITICHE
AD USO
DELLA GIOVENTU' ITALIANA

DI D.NA MARIA GAETANA
AGNESI
MILANESE

Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.

TOMO II.

IN MILANO, MDCCXLVIII.

NELLA REGIA-DUCAL CORTE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

INSTITUZIONI ANALITICHE

LIBRO SECONDO

Del Calcolo Differenziale.

L'Analisi delle quantità infinitamente piccole, che in altro modo Calcolo Differenziale, o Calcolo delle Flussioni suole chiamarsi, è quella, che versa intorno alle differenze delle quantità variabili, di qualunque ordine sieno esse differenze. Questo calcolo contiene i Metodi delle Tangenti; de' Massimi, e Minimi; de' Flessi contrarj, e Regressi delle Curve; de' Raggi Osculatori ec., e però dividendo in più Capi tutta la Materia sia.

C A P O I.

Dell' Idea de' Differenziali di diversi ordini, e del Calcolo de' medesimi.

1. COl nome di quantità variabili si vogliono significare quelle, che sono capaci di aumento, e di decremento, e si concepiscono come fluenti, e per così dire, generate da un moto continuo.

S'intenda (*Fig.* 1.) la retta ABC, generata dal moto del punto A, prodotta in infinito, sopra cui insista, facendo un qualunque angolo, l'altra retta BD, e suppongasi, che mentre il punto B giungne da B in C, seco portando la linea BD sempre a se stessa parallela da BD in CE, il punto D trascorra lo spazio FE con tal legge, che descriva la curva ADE; egli è chiaro, che l'assisse AB, AC, siccome l'ordinate BD, CE, e gl'archi AD, AE saranno quantità continuamente crescenti, e decrescenti, e però variabili.

2. Quantità costanti sono quelle, che nè crescono, nè calano, ma si concepiscono per determinate, ed invariabili, come i Parametri, gl' Assi, o Diametri ec.

Le costanti si denominano colle prime lettere dell'

Alfa-

Alfabeto, e le variabili colle ultime in quella guisa, che si è fatto nell'Algebra Cartesiana rispetto alle quantità note, ed incognite.

3. Si chiama differenza, o flussione di una quantità variabile quella porzione infinitesima, cioè tanto piccola, che ad essa variabile abbia proporzione minore di qualunque data, e per cui crescendo, o diminuendosi la medesima variabile, possa ciò non ostante assumersi per la stessa di prima.

Sia (*Fig.* 2., *e* 3.) la curva AM, il di cui asse, o diametro AP; e si prenda nella AP prodotta una porzione infinitesima Pp, sarà essa la differenza, o sia la flussione dell'assissa AP, e si potranno considerare per eguali le due AP, Ap, non essendovi proporzione tra la quantità finita AP, e la porzione infinitesima Pp. Da' punti P, p si alzino le due ordinate parallele PM, pm in qualunque angolo, e si tiri la corda mM prodotta in B, e la retta MR parallela ad AP; poichè sono simili i due triangoli BPM, MRm, sarà BP, PM :: MR, Rm, ma le due quantità BP, PM sono finite, ed MR è infinitesima, adunque sarà pure infinitesima la Rm, e però sarà essa la differenza dell' ordinata PM; per la stessa ragione sarà infinitamente piccola la corda Mm, ma (come dimostrerò in appresso) la corda Mm non si distingue dall'archetto, e si può prendere indifferentemente l'uno per l'altra,

adun-

adunque sarà l'archetto Mm quantità infinitesima, e però la differenza dell'arco AM della curva. Da ciò chiaramente si vede, che anco lo spazio $PMmp$, chiuso dalle due ordinate PM, pm, dalla infinitesima Pp, e dall'archetto infinitesimo Mm, sarà la differenza dell'area AMP compresa fra le due coordinate AP, PM, e la curva AM; e condotte le due corde AM, Am, sarà il triangolo mistilineo MAm la differenza del segmento AMS chiuso dalla corda AM, e dalla curva ASM.

4. La Caratteristica, con cui soglionsi esprimere le differenze, è la lettera d, quindi posta l'assissa $AP = x$, sarà Pp, o $MR = dx$; e similmente posta l'ordinata $PM = y$, sarà $Rm = dy$, e posto l'arco di curva $ASM = s$, lo spazio $APMS = t$, il segmento $AMS = u$, sarà $Mm = ds$, $PMmp = dt$, $AMm = du$, e tutte queste sono differenze prime, o flussioni del primo ordine.

E si avverta, che le predette differenze si scrivono col segno positivo, se per esse crescano le variabili loro, e col negativo se le variabili calino. Così nella curva NEC (*Fig.* 4.) essendo $AB = x$, $BF = dx$, $BC = y$, sarà $DC = -dy$, differenza negativa della y.

Che queste tali quantità differenziali non sieno vane immaginazioni, oltre di che egli è manifesto dal metodo degl' Antichi de' Poligoni inscritti, e circoscritti,

fcritti, fi può chiaramente vedere dal folo idearfi, che l'ordinata *MN* (*Fig.* 4.) fi vada continovamente accoftando alla *BC*, finchè con effa coincida; ora egli è chiaro, che prima, che quefte due linee coincidano, averanno tra loro una diftanza, ed una differenza inaffegnabile, cioè minore di qualunque quantità data; in tale pofizione fieno *BC*, *FE*, adunque *BF*, *CD* faranno quantità minori di qualunque data, e però inaffegnabili, o fia differenze, o fluffioni.

Anzi con la fola comun Geometrìa è ficuro, che non folo quefte, ma altre quantità minime di claffi infinite entrano realmente a formare l'eftenfione geometrica. Si danno in geometrìa le quantità incommenfurabili, ed infinite di genere, come è noto a' Geometri, ed agl' Analifti, dunque fi danno le grandezze infinitefime di varj ordini.

Ed in fatti fia a cagion d'efempio (*Fig.* 5.) *AB* il lato, ed *AC* il diametro d'un quadrato, le quali due linee per l'ultima propofizione del libro 10. di Euclide fono fra loro afimmetre, vale a dire incommenfurabili. Dico per tanto: che non fono effe refe tali da una qual fi fia finita lineeta *CE*, per quanto piccola effa fi prenda, ma bensì da un' altra infinitamente minore, cioè della claffe delle infinitefime.

Fingafi, che la linea *EC* finita renda, s'egli è poffibile, le due *AB*, *AC* afimmetre; in confeguenza

la

la reſtante AE ſarà commenſurabile al lato AB. Sia la retta F comune loro miſura, la quale non può mai eſſere eguale alla EC, altrimenti ſarebbero commenſurabili il lato, ed il diametro; ſarà adunque, o maggiore, o minore.

Nel primo caſo ſi ſottragga F da EC, quante volte ſi può, ed il reſiduo ſia GC. E perchè F miſura AB, AE, ed anco EG, le due rette AB, AG averanno fra loro una proporzione razionale, conſeguentemente non era la grandezza EC, che faceſſe incommenſurabili le AB, AC, ma una quantità più piccola, per eſempio la GC, la quale però è finita, eſſendoſi dalla finita EC ſottratta una, o più fiate la finita F. Dividaſi F per metà, ed indi ancora per metà ſino a tanto, che ſi venga ad una parte aliquota di F minore di GC, e levata queſta da GC, reſterà HC, la quale, replicato il diſcorſo, non è quella che rende incommenſurabili le linee AB, AC; ed atteſo che il raziocinio vale per qual ſi ſia grandezza finita, ſi conchiuda, che la incommenſurabilità procede da una quantità inaſſegnabile minore di qualunque data, lo che ſi verifica parimente nell'altro caſo, mentre cioè ſia la comune miſura F maggiore di EC, il che ec.

Dopo di ciò vado avanti, e dico, che i quadrati ſopra le rette AB, AC, i quali ſi riſpondono come l'unità al binario, non oſtante, che i lati ſieno irrazionali,

zionali, sono però commensurabili, e fatti tali da una quantità infinitesima del secondo ordine. Esposti (*Fig. 6.*) i due quadrati *AB*, *AC*, segno le due quantità eguali, ed infinitesime, che rendono asimmetri i lati *AD*, *AG*, *AI*, *AH*, e sieno queste *ED*, *FI*, e compiuta la preparazione (come nella Figura) si noti, che i due rettangoli *DK*, *IK* sono incommensurabili al quadrato *AB*, e la ragione si è, perchè sono compresi dalle rette *EK*, *FK* commensurabili alle due *AG*, *GB*, e di più dalle linee minime, ed inassegnabili *ED*, *FI*, che sono quelle, dalle quali nasce l'asimmetrìa de' lati *AD*, *AG*, *AI*, *AH*. Aggiunto però a' suddetti rettangoli il quadrato *AK*, averemo il gnomone composto delle tre accennate grandezze asimmetro al quadrato *AB*; ma l'intiero quadrato *AC* sta all'altro *AB* in razional proporzione, dunque il quadrato *AC* è reso tale dal quadrato infinitesimo *KC*, quantità del secondo ordine, per la quale supera il suddetto gnomone asimmetro.

Noto, che i cubi sopra le linee *AI*, *AH* sono incommensurabili, tutto che sieno razionali le loro basi, e si può facilmente provare, che sono ridotti tali da una grandezza inassegnabile del terzo ordine, ed in tal guisa col discorso di mano in mano si proceda.

5. In quella guisa che le differenze prime non ânno proporzione assegnabile alle quantità finite, così

le differenze feconde, o fluffioni del fecondo ordine non ânno proporzione affegnabile alle differenze prime, e fono di effe infinitamente minori per modo, che due quantità infinitefime del primo ordine, ma che differifcono tra loro d'una differenza feconda, poffono affumerfi per eguali. Lo fteffo fi dica delle differenze terze rifpetto alle feconde, e così di mano in mano.

Le differenze feconde fi fogliono marcare con doppia d, le terze con trè d ec. La differenza adunque di dx, cioè la differenza feconda di x fi fcriverà ddx, o pure d^2x, nel che fi avverta, non effere lo fteffo d^2x, e dx^2, perchè il primo fignifica, come ô detto, la differenza feconda di x, ed il fecondo fignifica il quadrato di dx; la differenza terza farà $dddx$, o pure d^3x ec. Così ddy farà la differenza di dy, cioè la differenza feconda di y ec.

Ma per formare giufta idea delle feconde, terze ec. differenze faranno opportuni i feguenti Teoremi.

TEOREMA I.

6. Sia una qualunque curva MBC, (*Fig.* 7.) ed una porzione di effa BC infinitefima del primo ordine. Da' punti B, C fi conducano perpendicolari alla curva le rette BA, CA. Dico: che le rette BA, CA fi potranno affumere per eguali.

Si

Si conducano le tangenti BD, CD, e la corda BC. Se le due BA, CA non sono eguali, sia quella, che si vuole di loro, come CA, maggiore dell'altra, e ad essa si conduca perpendicolare la BH. La differenza fra le linee BA, CA sarà minore dell'intercetta CH, per l'angolo retto in H, e CH minore della corda BC, ma la corda BC è infinitesima del primo ordine, essendosi supposto infinitesimo l'arco; adunque la differenza tra BA, e CA almeno non sarà maggiore di una quantità infinitesima del primo ordine, e però le rette BA, CA potranno assumersi per eguali.

COROLLARIO I.

Adunque il triangolo BAC sarà isoscele, e però gl'angoli ABC, ACB alla base eguali tra loro, e sottratti questi da' retti ABD, ACD, rimarranno eguali i due BCD, DBC, e per conseguenza anche eguali le due tangenti BD, CD.

COROLLARIO II.

Condotta la retta DA, essendo simili, ed eguali i due triangoli ADB, ADC, taglierà essa in due parti eguali gl'angoli BAC, BDC; e perchè vengono pure ad essere simili, ed eguali i due triangoli AEB, AEC, sarà la stessa AD normale a BC, e la dividerà egualmente in E.

COROLLARIO III.

Ed essendo simili i due triangoli DAC, EDC, sarà l'angolo DCE eguale all'angolo DAC, ed i due angoli DCE, DBE presi assieme eguali all' angolo BAC.

COROLLARIO IV.

Da ciò si raccoglie, che un' arco qualunque infinitesimo BC di qualsivoglia curva avrà le stesse affezioni, e proprietà dell'arco di circolo descritto col centro A, e raggio AB, o AC.

COROLLARIO V.

Essendo simili i due triangoli AEB, BED, averemo $AE, EB :: EB, ED$; ma AE è linea finita, ed EB infinitesima del primo grado, dunque ED sarà infinitesima del secondo, e sarà il suo valore $= \frac{\overline{EB}^2}{AE}$. Ma il rettangolo sotto la doppia AE in EI è eguale (per la proprietà del circolo) al quadrato EB; dunque $\overline{EB}^2 = 2AE \times EI = AE \times ED$, e per conseguenza $2AE, AE :: ED, EI$; ma il primo termine dell' analogìa è doppio del secondo, dunque anco il terzo del

del quarto, e conſeguentemente ſaranno eguali le due linee del ſecondo ordine IE, ID.

COROLLARIO VI.

E perchè la differenza tra la ſemicorda BE, e la toccante BD è una quantità minima del terzo grado; conciofiacchè, condotto dal centro B, coll'intervallo BE l'arco di cerchio EL, grandezza della ſeconda claſſe, la quale con il ſuo ſeno ſi confonde, ſaranno ſimili i due triangoli BDE, EDL, che oltre gl'angoli retti in E, ed L, ânno l'angolo comune in D, dunque BD, $DE :: ED$, DL; ma BD è fluſſione prima, e DE ſeconda (per l'antecedente Corollario) dunque DL ſarà una terza fluſſione. Quindi eſſendo l'arco BI della curva maggiore della ſemicorda BE, e minore della tangente BD, non può differire dall'una, e dall' altra ſe non per una grandezza al più del terzo ordine.

TEOREMA II.

7. Sia una qualunque curva DAE, (*Fig.* 8., *e* 9.) nel di cui aſſe preſe due porzioni infiniteſime del primo ordine, ed eguali HI, IM, ſi conducano le ordinate parallele HA, IB, ME, le quali taglieranno nella data curva gl'archetti AB, BE parimente infiniteſimi del primo ordine. Si conduca la corda ABC, la quale concorrà

nel

nel punto C con l'ordinata ME prodotta, ſe occorre: Dico: che l'intercetta CE tra la curva, e la corda AB prodotta ſarà infiniteſima del ſecondo ordine.

Si conduca la corda AE. Se la retta IM foſſe quantità aſſegnabile finita, anco il triangolo ACE ſarebbe finito; ma accoſtandoſi ſempre alla ordinata HA la ME in maniera, che la IM divenga pure fluſſione, o ſia infiniteſima del primo ordine, l'angolo ACE rimane ſempre lo ſteſſo, e l'angolo AEC ſi accreſce, facendoſi ſempre minore l'angolo CAE, fino a che divenga finalmente minore di un qualunque dato, cioè ſi faccia infiniteſimo. In queſto caſo, ſiccome il ſeno di un'angolo infiniteſimo del primo ordine col raggio finito aſſegnabile è quantità infiniteſima del primo ordine, così il ſeno dell'angolo CAE infiniteſimo del primo ordine nel raggio AE, o AC infiniteſimo del primo ordine ſarà quantità infiniteſima del ſecondo ordine; ma ne' triangoli i lati ſono proporzionali ai ſeni degl'angoli oppoſti, adunque anche la retta CE ſarà infiniteſima del ſecondo ordine.

Chiamate per tanto le $DH = x$, $HA = y$, $HI = IM = dx$, ſarà $FB = GC = dy$, ed $EC = -ddy$, prefiggendo il ſegno negativo, perchè per eſſa cala, e non creſce la dy, (*Fig.* 8.) e così all'oppoſto averà il ſegno poſitivo, ſe per eſſa creſca la dy, cioè ſe la curva ſia conveſſa in quel punto all'aſſe DM. (*Fig.* 9.)

COROL-

COROLLARIO.

Se dal punto E ſi conduca alla BC la normale ES, ſaranno pure ES, CS fluſſioni del ſecondo ordine, imperciocchè ciaſcuna minore di EC.

TEOREMA III.

8. Se nel circolo ſi prenda un'arco infiniteſimo del primo ordine; dico che il ſeno verſo ſarà quantità infiniteſima del ſecondo, e la differenza fra il ſeno retto, e la tangente ſarà infiniteſima del terzo.

Sia l'arco DC (*Fig.* 10.) infiniteſimo del primo ordine, DB il ſeno retto, CE la tangente, e ſi conduca DF parallela ad AC. Per la natura del circolo ſi â $GB, BD :: BD, BC$; ma GB è quantità finita, e BD infiniteſima del primo ordine, adunque ſiccome GB è infinitamente maggiore di BD, così ſarà BD infinitamente maggiore di BC, e però BC, o ſia DF infiniteſima del ſecondo ordine. Per la ſimilitudine de' triangoli ABD, DFE, ſarà $AB, BD :: DF, FE$; ma AB quantità finita è infinitamente maggiore di BD infiniteſima del primo ordine, adunque DF infiniteſima del ſecondo ordine ſarà infinitamente maggiore di FE; e però FE fluſſione del terzo.

COROL-

COROLLARIO I.

9. E poichè la tangente è ſempre maggiore dell' arco, l'arco della corda, e la corda del ſeno retto; potendoſi aſſumere per eguali la tangente, ed il ſeno retto, giacchè non differiſcono ſe non per una infiniteſima del terzo, ſi potranno anco aſſumere per eguali la tangente, l'arco, la corda, ed il ſeno retto.

COROLLARIO II.

10. Se s'immagineremo, che il raggio del circolo ſia AN infiniteſimo del primo ordine, ſarà l'arco NO, ed il ſeno OM infiniteſimo del ſecondo, e però il ſeno verſo MN infiniteſimo del terzo.

COROLLARIO III.

11. Sieno nell'aſſe DM (*Fig.* 11., *e* 12.) due differenze prime, ed eguali HI, IM, alle quali corriſpondono i due archi infiniteſimi di curva AB, BE, e ſi tirino le due corde BE, AB, e queſta prodotta incontri in C l'ordinata ME parimenti prodotta, ſe fa d'uopo. Si tiri ES perpendicolare a BC, e col centro B, raggio BE l'arco EO. Per il Corollario del Teorema II., CS è infiniteſima del ſecondo grado, e per l'antecedente, OS è infiniteſima del terzo, dunque CO è infini-

infiniteſima del ſecondo, perchè l'infiniteſima del terzo aggiunta, o ſottratta dall' infiniteſima del ſecondo non fa alcuna alterazione; ma eſſendo $HI = IM$, o ſia $AF = BG$, per i triangoli ſimili, ed eguali AFB, BGC, è anco $AB = BC$, ma gl'archi poſſono aſſumerſi eguali alle corde, dunque CO ſarà la differenza de' due archi AB, BE, e però ſe ſia la curva $DA = s$, ſarà $AB = BC = ds$, $CO = -dds$ col ſegno negativo, perchè AB và calando, eſſendo BE minore di AB nella *Fig.* 11., ed all'oppoſto col ſegno poſitivo nella *Fig.* 12.

SCOLIO.

12. Nel determinare le ſeconde differenze dell' ordinata, e dell' arco della curva ô ſuppoſto, e nel Teorema II., ed in queſt'ultimo Corollario, che le HI, IM ſieno eguali, vale a dire, che la differenza prima dell' aſſiſſa non ſi alteri giammai, ma rimanga coſtante, nel qual caſo la differenza ſeconda dell'aſſiſſa è nulla, cioè chiamata x l'aſſiſſa, dx la prima differenza, è $ddx = 0$.

Si fanno però due altre ſuppoſizioni ancora, cioè l'una, che ſia coſtante la differenza prima dell'ordinata, e variabile quella dell' aſſiſſa, e della curva; l'altra, che ſia coſtante la differenza prima della curva, e variabile quella dell' aſſiſſa, e dell' ordinata.

Ma dalle premeſſe coſe è facile il paſſaggio a queſt'

quest' altre due ipotesi. Ritenuto ciò, ch'è stato detto di sopra, sia (*Fig.* 13., *e* 14.) $BF=EG$, cioè costante la flussione dell'ordinata, si conduca EP parallela a BG, e PT perpendicolare, sarà dunque $BF=PT$, quindi $AF=BT$, $AB=BP$, e però GT, o sia EP la differenza tra HI, ed IM; e descritto col centro B, intervallo BE, l'arco EO, sarà PO la differenza tra l'arco AB, e l'arco BE, potendosi assumere le corde per gl'archi infinitesimi. Ma, per i triangoli simili BTP, CEP, avremo PT, $TB :: CE$, EP; PT, $PB :: CE$, CP; e PT, TB, BP sono flussioni prime, e CE flussione seconda, dunque saranno EP, CP, e molto più OP flussioni seconde, onde se sia $DH=x$, $DA=s$, sarà $TG=PE=ddx$, $PO=dds$ nella *Fig.* 13., e $PE=-ddx$, $PO=-dds$ nella *Fig.* 14., e $ddy=0$.

Sia costante il differenziale primo della curva, cioè $AB=BE$. Dal punto O si abbassi ON parallela a TP. Poichè per la supposizione è $AB=BE=BO$, sarà anco $AF=BN$, adunque VE, o sia NG è la differenza tra HI, ed IM; ma sarà anco $FB=NO$, dunque VO è la differenza tra BF, ed EG. Ma egli è chiaro, che essendo flussione del secondo ordine EC, lo sono pure EV, ed VO; dunque se sia $DH=x$, $HA=y$, sarà $NG=ddx$, $OV=-ddy$ nella *Fig.* 13., ed $NG=-ddx$, $OV=ddy$ nella *Fig.* 14., e $dds=0$.

La supposizione di una prima flussione costante rende

rende più brevi e facili i calcoli, come si vedrà nel farne uso; in varj incontri però, a fine di maggiore universalità, si procede dalle prime alle seconde differenze, senza fare la supposizione di alcuna prima flussione costante, ed è facile il determinarle.

Siano (*Fig.* 15., *e* 16.) HI, IM flussioni prime dell'assissa DH, ma non eguali, e la differenza tra loro sia ML, flussione seconda, e fatto il rimanente come sopra, si tiri l'ordinata LN, e la Ei parallela a BG. Essendo adunque LM la differenza di HI, sarà $HI=IL$, cioè $AF=BR$, e però simili, ed eguali i triangoli ABF, BRN, ed in conseguenza $BF=NR$; dunque Ni sarà la differenza tra BF, ed EG, cioè la differenza di BF, o sia la differenza seconda di AH. Similmente sarà $AB=BN$, dunque NO sarà la differenza tra l'arco AB, e l'arco BE; e però la differenza dell'arco AB, o sia la differenza seconda dell'arco DA, poichè egli è chiaro, che sono Ni, NO flussioni del secondo grado. Lo stesso discorso vale, se in luogo di supporsi IM maggiore di HI, di un differenziale secondo, si supponga minore.

13. Avvertirò, che le determinazioni fissate non racchiudono condizione alcuna intorno all' angolo delle coordinate, sebbene nelle Figure mostra di esser retto, ma nulla meno si deducono, qualunque siasi esso angolo.

LEMMA.

14. Gl' angoli rettilinei ſono tra loro nella ragione diretta degl' archi, e nell' inverſa de' raggi.

Sieno i due angoli (*Fig.* 17.) EAB, FAC. Prodotta AE in D, per la ſimilitudine de' ſettori ABE, ACD, ſarà $AB, BE :: AC, CD$, e però $CD = \frac{BE \times AC}{AB}$.

Ma l' angolo EAB, o ſia DAC, è all' angolo FAC, come CD a CF; dunque l' angolo EAB ſarà all' angolo FAC, come $\frac{BE \times AC}{AB}$ a CF, cioè come $\frac{BE}{AB}$ a $\frac{CF}{AC}$.

TEOREMA IV.

15. Preſo l' arco CF (*Fig.* 18.) infiniteſimo del primo grado della curva ACF qualunque, e condotte le perpendicolari CI, FI alla curva, ſe col centro I, intervallo IF, ſi deſcriverà l' arco di circolo FS, dico: che egli caderà tutto al di dentro della curva ACF verſo C, e l' intercetta CS ſarà quantità infiniteſima del terzo grado.

Sulla curva AQR s' intenda condotto un filo, il quale eſſendo fiſſo al diſotto nel punto R, e preſo nel punto A, ſi vada ſcoſtando dalla curva, ma in modo, che ſia ſempre teſo, onde il punto A deſcriva la curva ACF. Eſſendo il filo nella poſizione CQ, ſarà tangen-

te

te della curva nel punto Q; e nella posizione FR, che intendo infinitamente prossima alla CQ, sarà tangente in R, e prodotta CQ incontrerà FR in I. Poichè, per la generazione della curva ACF, la retta QC è eguale alla curva QA, e la retta RF alla curva RQA, e le due tangenti infinitesime QI, RI sono assieme maggiori dell'elemento QR; saranno anco CI, IR prese assieme maggiori della curva RQA, o sia della retta FR, dunque tolta la comune IR, sarà IC maggiore di IF, ed il circolo FS, descritto col centro I, intervallo IF, caderà dentro la curva. Ma per il I., e III. Teorema le due tangenti QI, RI non superano l'arco QR, che per una flussione terza, dunque la curva AQ assieme con le rette QI, IR supera della stessa quantità la curva AQR, cioè la retta FR; e detratta la comune IR, sarà AQ con QI, cioè IC maggiore di IF per una infinitesima del terzo ordine.

COROLLARIO.

16. Adunque si potrà considerare l'arco di circolo FS, come se si confondesse con l'arco di curva FC; e potrà prendersi indifferentemente l'uno per l'altro, e la tangente RF sarà perpendicolare alla curva ACF nel punto F, e QC nel punto C.

La curva AQR si chiama l'*Evoluta*, ACF la *Generata dell'evoluta*, cioè nata dallo scioglimento del filo.

filo della AQR; ed il circolo FS, del centro I, raggio IF, il *Circolo Osculatore*.

TEOREMA V.

17. Se alla curva $DABE$ (*Fig.* 11., *e* 12.) ne' punti infinitamente proſſimi A, B, E, cioè eſſendo gl'archetti AB, BE infiniteſimi primi, ſi conducano le perpendicolari QA, QB, ed NE, la quale incontri la BQ nel punto N. Dico: che gl' angoli AQB, BNE potranno aſſumerſi per eguali.

Per l'antecedente Lemma, l'angolo AQB ſtà all' angolo BNE, come $\frac{AB}{AQ}$ ad $\frac{EB}{BN}$, cioè come $AB \times BN$ ad $EB \times AQ$, ma il rettangolo $EB \times AQ$ non è minore del rettangolo $AB \times BN$, ſe non per il rettangolo $BE \times QN$, e per il rettangolo di BN nella differenza degl'archetti AB, BE; ed eſſendo QN, BE quantità infiniteſime del primo grado, ſarà il rettangolo da eſſe fatto quantità infiniteſima del ſecondo, ſiccome eſſendo la differenza degl'archetti AB, BE infiniteſima del ſecondo, ſarà pure il rettangolo di queſta in BN quantità infiniteſima del ſecondo, adunque i due rettangoli $AB \times BN$, $EB \times AQ$ non ſono diverſi, ſe non per due rettangoli infiniteſimi del ſecondo grado; adunque poſſono prenderſi per eguali, ed in conſeguenza anco gl'angoli AQB, BNE.

COROL-

COROLLARIO I.

18. Si conduca *PBR* tangente nel punto *B*; questa dividerà in due egualmente l'angolo *CBE* fatto dalle due corde *ABC*, e *BE*; imperciocchè essendo (Corollario III. Teorema I.) l'angolo *BQA* doppio dell'angolo *PBA*, a cui è eguale l'angolo *CBR*, anche l'angolo *BNE* sarà doppio dell'angolo *CBR*; ma, per lo stesso Corollario, l'angolo *BNE* è doppio pure dell'angolo *RBE*, adunque sono eguali gl'angoli *CBR*, *RBE*.

COROLLARIO II.

19. Sarà adunque l'angolo *CBE* eguale all'angolo *BNE*, e quindi il settore *BNE* simile al settore *EBO*.

TEOREMA VI.

20. Se in due circoli, i diametri de' quali si eccedano d'un' infinitesima prima, si prenderanno due seni retti eguali, ed infinitesimi del primo grado; la differenza dei seni versi sarà infinitesima del terzo.

Sieno i due circoli *ABC*, *PFH*, (*Fig.* 19.) i seni retti infinitesimi del primo grado, ed eguali sieno *BE*, *FG*, i seni versi *EC*, *GH*. Si tirino le corde

de

de AB, BC. Essendo il seno BE, e però l'arco BC flussione prima, sarà l'angolo BMC infinitesimo del primo ordine, e però anche l'angolo BAC, che ne è la metà, e l'angolo EBC, che a quello è eguale; adunque poichè l'angolo EBC, ed i lati EB, BC sono infinitesimi primi, sarà il seno verso EC infinitesimo secondo.

Lo stesso vale del seno verso GH. Ma il seno verso EC (per la proprietà del circolo) si trova essere $= \frac{\overline{EB}^2}{AE}$, ed il seno verso $GH = \frac{\overline{GF}^2}{PG} = \frac{\overline{EB}^2}{PG}$, dunque avremo l'analogìa EC, $GH :: PG$, AE; ma PG quantità finita supera AE quantità finita d'una quantità infinitesima rispetto a se, cioè del primo ordine, per l'ipotesi, dunque EC quantità infinitesima del secondo ordine supererà GH infinitesima del secondo, d'una quantità infinitesima rispetto a se, cioè del terzo.

TEOREMA VII.

21. Sia la curva BEG (*Fig.* 20., *e* 21.) riferita al fuoco, cioè tale, che le ordinate tutte si partano da un punto dato, che si chiama il fuoco, e sia A, da cui si conducano tre ordinate infinitamente prossime AB, AE, AG, le quali comprendano i due archetti infinitesimi del primo grado BE, EG, e si tiri la cor-

da

da BE, la quale prodotta incontri in L l'ordinata AG pure prodotta, se fa bisogno. Col centro A si descrivano gl'archi BC, EF, e sieno BM, EN i loro seni retti; indi si faccia l'angolo NEP eguale all'angolo MBE, dico: che l'intercetta GP sarà differenza infinitesima del secondo ordine dell'ordinata AB.

Si tiri la corda EG. Poichè gl'angoli MBE, NEP sono eguali per la costruzione, e gl'angoli in M, ed N sono retti, saranno simili i triangoli EBM, PEN; quindi preso per costante il seno BM, cioè supposto eguale ad EN, i predetti triangoli saranno in oltre eguali, e però sarà $ME = NP$. Ma supposto $BM = EN$, per l'antecedente teorema, la differenza de' seni versi MC, NF è infinitesima rispetto a loro, dunque saranno anco eguali le CE, FP, e però GP sarà la differenza tra CE, ed FG. Ma condotte perpendicolari alla curva ne' punti E, G le rette EQ, QG, l'angolo LEG è eguale all'angolo EQG per il Corollario II. del Teorema V., (il quale si verifica, o sia la curva riferita all'asse, o sia riferita al fuoco) e l'angolo EQG è infinitamente piccolo, dunque sarà infinitamente piccolo anche l'angolo LEG; e perchè sono infinitesime del primo ordine le rette EG, EL, sarà GL infinitesima del secondo, e molto più GP rispetto alla *Fig.* 20.

Per il Corollario I. del Teorema III. il seno BM

è eguale all' arco BC; dunque, preso per costante in luogo del seno l'arco, e chiamato esso $= dx$, $AB = y$, $CE = dy$, sarà $GP = -ddy$. E descritto col centro E, intervallo EG l'arco GV, sarà $VP = -dds$, se sia $BE = ds$.

COROLLARIO.

22. L'angolo LEP sarà eguale all'angolo EAG; imperciocchè l'angolo EPA, per la costruzione, è eguale all'angolo BEA, ma EPA esterno è eguale ai due interni L, ed LEP; e l'altro BEA eguale ai due L, ed EAG, dunque tolto il comune L, rimarranno eguali i due LEP, EAG. E perchè ciò si verifica, o sia la curva concava al punto A, (*Fig*. 20.) o sia convessa, (*Fig*. 21.) come è facile a vedere, sarà nella stessa *Fig*. 21. infinitesimo l'angolo LEP, e quindi infinitesima del secondo ordine la LP, ma si è veduto, che GL è pure infinitesima del secondo, dunque lo sarà anche tutta la GP, che sarà $= ddy$; e col centro E, intervallo EG descritto l'arco GV, sarà $PV = dds$.

Facendo l'ipotesi della dy costante, col centro A, intervallo AG si descriva l'arco GT, e dal punto T si tiri la retta TOA. Poichè $FG = EC$, per l'ipotesi, sarà il triangolo TEO simile, ed eguale al triangolo EBC, e però $BC = EO$, e $BE = ET$; dunque

que $OF = ddx$, e $TV = dds$ nella *Fig.* 20.; ma $OF = -ddx$, e $TV = -dds$ nella *Fig.* 21.

Presa ds costante, si conduca la retta VRA, sarà $EG = EV = BE$, e però simili, ed eguali i triangoli EBC, EVR, adunque $BC = ER$, $CE = RV$; onde $RF = ddx$, $VI = -ddy$ nella *Fig.* 20., ma $RF = -ddx$, $VI = ddy$ nella *Fig.* 21.

Che se non si prenda alcuna prima flussione costante: sia EF maggiore di BC (*Fig.* 22., *e* 23.) per la flussione seconda RF; si conduca la retta ART; col centro A, intervallo AG l'arco GT; e col centro E, intervallo EG l'arco GV. Poichè dunque $BC = ER$, sarà anco $CE = RI$, e $BE = EI$, adunque TI sarà la differenza tra CE, ed FG, ed VI la differenza tra BE, ed EG.

SCOLIO.

23. Non sarà fuor di proposito il prevenire una difficoltà, che mi potrebbe esser mossa. Ella è, che nel Teorema antecedente si assumono per eguali le CE, FP in virtù però del Teorema VI., ed il Teorema VI. suppone eguali i seni BM, EN; dunque pare, che le determinazioni fissate de' differenziali secondi abbiano luogo solo nel caso, che si faccia l'ipotesi della flussione costante BC, e non nell'altre; ma per togliere questa difficoltà basta riflettere, che quan-

tunque si ponga variabile la BC, la differenza però è infinitesima del secondo grado, che non toglie l'eguaglianza tra le flussioni prime BC, EF; e così nè meno tra i seni BM, EN.

SCOLIO II.

24. Ne' premessi Teoremi si contengono i principj, con i quali si maneggiano le quantità infinitesime di qualunque grado, e ci si apre la strada di far buon uso del calcolo differenziale, e sommatorio; ed ancora di applicare in oltre alle grandezze minime la Sintesi, e l'Analisi degli Antichi, e di servirsi della pura geometrìa, il che riesce di una particolare semplicità, ed eleganza.

Per iscansare poi i paralogismi, ne' quali pur troppo è facile incorrere, gioverà il riflettere, che nelle linee infinitamente piccole di qualsivoglia ordine, conforme si pratica anco nelle finite, ânno a considerarsi due importanti circostanze, cioè la loro grandezza, e la loro posizione. E quanto alla grandezza non credo, che mai si possa sbagliare, se non da coloro, che credono tali grandezze infinitesime un mero nulla.

Ora sebbene le quantità col diminuirsi all'infinito passano da genere a genere, le proporzioni in qualunque ordine persistono le medesime; e perchè di tre

linee

linee della ſteſſa claſſe può coſtituirſi un triangolo, ſi noti, che minorandoſi proporzionalmente i lati ſino a far tranſito da un grado all' altro, non ſi mutano gli angoli, che ſempre fra loro la ſteſſa ragione conſervano. In tali incontri non è mai lecito prendere una linea per l'altra, nè fingere eguaglianza, o adequazione dove non ci può eſſere, anzi conviene tener ferme le analogìe, e paragonare i triangoli d'un genere con quelli dell'altro, cioè gl'infiniteſimi coi finiti, e gl'infiniteſimi del ſecondo ordine con quelli del primo, e con i finiti, e così vadaſi diſcorrendo.

Ma ſe due grandezze di qual ſi ſia ordine diferiranno per una grandezza, che riſpetto a loro ſia inaſſegnabile, ſicuramente, e ſenza riſchio alcuno d'errare una ſi può prendere per l'altra, nè v'è timore, che l'adequamento porti un minimo ſconcerto.

Fa d'uopo adunque ſtare molto guardinghi quando ſi tratta della poſizione delle linee, e degl'angoli, conciosiacchè il confondergli quando non deeſi tira ſeco manifeſti paralogiſmi.

25. Stabiliti i fondamenti principali di queſto calcolo, farò paſſaggio alle maniere, o regole di differenziare le formole. Ed in primo luogo, debbaſi prendere la differenza di varie quantità ſommate aſſieme, o ſottratte l'una dell'altra, per eſempio di $a+x+z+y-u$. Siccome la differenza di x è dx, di z è dz ec.,

e

e della a coſtante è nulla, conſiderando ogni quantità accreſciuta della ſua differenza con quel ſegno, che le compete, la formola propoſta ſi muterà in queſt' altra $a+x+dx+z+dz+y+dy-u-du$, da cui ſottraendo la prima, ſarà il reſiduo $dx+dz+dy-du$, che è appunto ciò, per cui è creſciuta la quantità propoſta, vale a dire la ſua differenza.

Da ciò ſi ricava la regola generale, che per differenziare qualunque compleſſo di quantità analitiche di una dimenſione, baſterà prendere le differenze di ciaſcheduna variabile coi loro ſegni, ed il compleſſo di queſte differenze ſarà la differenza della quantità propoſta. La differenza adunque di $b-s-z$ ſarà $-ds-dz$; la differenza di $aa-4bz+by$ ſarà $-4bdz+bdy$.

26. Che ſe la quantità propoſta da differenziarſi ſarà il prodotto di più variabili, come xy, mentre x diviene $x+dx$, la y diviene $y+dy$, ed xy diviene $xy+ydx+xdy+dxdy$, che è il prodotto di $x+dx$ in $y+dy$; da queſto prodotto adunque ſottratta la quantità propoſta xy, rimane $ydx+xdy+dxdy$, ma $dxdy$ è quantità infinitamente minore di ciaſcheduna dell' altre due, le quali ſono il rettangolo di una quantità finita in una infiniteſima, e $dxdy$ è il rettangolo di due infiniteſime, e però infinitamente minore, dunque eſſo rettangolo ſi potrà francamente traſcurare, quindi la differenza di xy ſarà $xdy+ydx$.

Sia

Sia da differenziarſi xyz; il prodotto di $x + dx$ in $y + dy$ in $z + dz$ è $xyz + yzdx + xzdy + xydz + zdxdy + ydxdz + xdydz + dxdydz$, il quale, ſottratta la quantità propoſta, rimane $yzdx + xzdy + xydz + zdxdy + ydxdz + xdydz + dxdydz$; ma il primo, ſecondo, e terzo termine è ciaſcuno il prodotto di due quantità finite, e di una infiniteſima; ed il quarto, quinto, e ſeſto è ciaſcuno il prodotto di una quantità finita, e di due infiniteſime, dunque ciaſcuno di queſti è infinitamente minore di ciaſcuno di quelli, e però ſi potrà traſcurare, e molto più l'ultimo, che è il prodotto di trè infiniteſimi; traſcurati per tanto tutti i termini, principiando dal quarto, ſarà $yzdx + xzdy + xydx$ la differenza di xyz.

Quindi naſce la regola, che per differenziare un prodotto di più quantità moltiplicate aſſieme, ſi dovrà prendere la ſomma de' prodotti della differenza di ciaſcuna di tali quantità nel prodotto dell' altre. La differenza adunque di $bxzt$ ſarà $bxzdt + bxtdz + btzdx + xzt \times 0$, perchè la differenza della coſtante b è nulla, cioè la differenza di $bxzt$ ſarà $bxzdt + bxtdz + btzdx$. La differenza di $\overline{a + x} \times \overline{b - y}$ ſarà $dx \times \overline{b - y} - dy \times \overline{a + x}$, cioè $bdx - ydx - ady - xdy$.

27. La formola da differenziarſi ſia una frazione, per eſempio, $\frac{x}{y}$. Si ponga $\frac{x}{y} = z$, ſarà dunque $x = zy$,

e però anche eguali le loro differenze, cioè $dx = zdy + ydz$, quindi $dz = \frac{dx - zdy}{y}$, ora $z = \frac{x}{y}$, sostituito pertanto questo valore in luogo di z, sarà $dz = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy} = \frac{ydx - xdy}{yy}$; ma se $z = \frac{x}{y}$, sarà dz il differenziale di $\frac{x}{y}$, dunque il differenziale di $\frac{x}{y}$ sarà $\frac{-xdy + ydx}{yy}$.

E la regola sarà, che il differenziale d'una frazione sarà un'altra frazione, il di cui numeratore sia il prodotto della differenza del numeratore nel denominatore, meno il prodotto della differenza del denominatore nel numeratore della proposta frazione; ed il denominatore sia il quadrato del denominatore della stessa proposta frazione da differenziarsi.

La differenza adunque di $\frac{a}{x}$ sarà $-\frac{adx}{xx}$. La differenza di $\frac{a+x}{x}$ sarà $\frac{xdx - adx - xdx}{xx}$, cioè $-\frac{adx}{xx}$. La differenza di $\frac{y}{b-y}$ sarà $\frac{bdy - ydy + ydy}{\overline{b-y}^2}$, cioè $\frac{bdy}{\overline{b-y}^2}$. La differenza di $\frac{3xy}{a-x}$ sarà $\frac{3xdy + 3ydx \times \overline{a-x} + dx \times 3xy}{\overline{a-x}^2}$, cioè $\frac{3axdy + 3aydx - 3xxdy}{\overline{a-x}^2}$.

28. Debbansi differenziare le potestà. E sia in primo luogo una potestà perfetta, e positiva, cioè di esponente intero positivo, per esempio, xx; ora xx è il prodotto di x in x, adunque per la regola de' prodotti il differenziale sarà $xdx + xdx$, cioè $2xdx$. Sia da differenziarsi x^3; ma x^3 è il prodotto di x in x in x, adunque il differenziale sarà $xxdx + xxdx + xxdx$, cioè $3xxdx$, e comecchè la facenda procede con lo stesso ordine all' infinito, il differenziale di x^m, essendo m un numero qualunque intiero positivo, sarà $mx^{m-1}dx$.

Se l' esponente sarà negativo, per esempio ax^{-2}, o sia $\frac{a}{xx}$, il differenziale, per la regola delle frazioni, sarà il prodotto della differenza del numeratore nel denominatore, meno il prodotto della differenza del denominatore nel numeratore, diviso il tutto per il quadrato del denominatore; ma il differenziale del denominatore è $2xdx$, dunque il differenziale di ax^{-2}, o sia $\frac{a}{xx}$, sarà $-\frac{2axdx}{x^4}$, cioè $-\frac{2adx}{x^3}$; il differenziale di x^{-3}, o sia di $\frac{1}{x^3}$, sarà $-\frac{3xxdx}{x^6}$, cioè $-\frac{3dx}{x^4}$; e generalmente il differenziale di $\frac{ax^{-m}}{b}$, o sia di $\frac{a}{bx^m}$; sarà $-\frac{max^{m-1}dx}{bx^{2m}}$, cioè $-\frac{max^{-m-1}dx}{b}$.

Sia la poteſtà imperfetta, ed in primo luogo poſitiva (cioè l'eſponente ſia rotto poſitivo) $\sqrt[n]{x^m}$, o ſia $x^{\frac{m}{n}}$, eſprimendo $\frac{m}{n}$ un qualunque rotto poſitivo.

Si ponga $x^{\frac{m}{n}} = z$, ed elevando ciaſcun membro alla poteſtà n, $x^m = z^n$, e differenziando, $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$, onde $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}}$, ma eſſendo $x^m = z^n$ è anco $z^{n-1} = x^{m - \frac{m}{n}}$, dunque ſoſtituito queſto valore in luogo di z^{n-1}, ſarà $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nx^{m-\frac{m}{n}}}$, cioè $dz = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx$.

Se l'eſponente ſarà negativo, come $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$, cioè $x^{-\frac{m}{n}}$, o ſia $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$, il differenziale, per la regola delle frazioni, ſarà $\frac{-\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx}{x^{\frac{2m}{n}}}$, cioè $-\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1} dx$.

La

La regola generale è adunque, che il differenziale d'una qualunque poteſtà perfetta, o imperfetta, poſitiva, o negativa, è il prodotto dell'eſponente della poteſtà nella quantità elevata alla poteſtà minore, per l'unità, della poteſtà data, ed il tutto moltiplicato nella differenza della quantità.

Sia da differenziarſi $x^{\frac{3}{2}}$, il differenziale ſarà $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}dx$, cioè $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx$, o ſia $\frac{3}{2}dx\sqrt{x}$.

Sia $x^{\frac{5}{4}}$, la differenza ſarà $\frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1}dx$, cioè $\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}dx$, o ſia $\frac{5}{4}dx\sqrt[4]{x}$.

Sia $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, cioè $x^{-\frac{3}{2}}$, la differenza ſarà $-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}dx$, cioè $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}dx$, o ſia $-\frac{3dx}{2x^{\frac{5}{2}}}$.

Sia da differenziarſi $\overline{ax+xx}^{2}$, ſarà la differenza $2\times\overline{ax+xx}\times\overline{adx+2xdx}$, cioè $2aaxdx+6axxdx+4x^{3}dx$.

Sia $\overline{xy+ax}^{3}$, la differenza ſarà $3\times\overline{xy+ax}^{2}\times\overline{xdy+ydx+adx}$;

 cioè

cioè $3x^3yydy + 6ax^3ydy + 3aax^3dy + 3y^3xxdx + 9ayyxxdx + 9aayxxdx + 3a^3xxdx$.

Sia $\frac{1}{\overline{ax-yy}^2}$, sarà la differenza $\frac{-2\times\overline{ax-yy}\times\overline{adx-2ydy}}{\overline{ax-yy}^4}$, cioè $\frac{-2adx+4ydy}{\overline{ax-yy}^3}$.

Sia $\sqrt{ax-xx}$, cioè $\overline{ax-xx}^{\frac{1}{2}}$, sarà la differenza $\frac{1}{2}\times\overline{ax-xx}^{\frac{1}{2}-1}\times\overline{adx-2xdx}$, cioè $\frac{adx-2xdx}{2\times\overline{ax-xx}^{\frac{1}{2}}}$, o sia $\frac{adx-2xdx}{2\sqrt{ax-xx}}$.

Sia $\sqrt{xx+xy}$, cioè $\overline{xx+xy}^{\frac{1}{2}}$, sarà la differenza $\frac{1}{2}\times\overline{xx+xy}^{\frac{1}{2}-1}\times\overline{2xdx+xdy+ydx}$, o sia $\frac{2xdx+xdy+ydx}{2\sqrt{xx+xy}}$.

Sia $\sqrt[3]{ax-xx}$, cioè $\overline{ax-xx}^{\frac{1}{3}}$, sarà la differenza $\frac{1}{3}\times\overline{ax-xx}^{\frac{1}{3}-1}\times\overline{adx-2xdx}$, o sia $\frac{adx-2xdx}{3\times\overline{ax-xx}^{\frac{2}{3}}}$.

Sia

Sia $\frac{1}{\sqrt[3]{\overline{ay+xy}}}$, cioè $\frac{1}{\overline{ay+xy}^{\frac{1}{3}}}$, ſarà la differenza

$$\frac{-\frac{1}{3}\times\overline{ay+xy}^{\frac{1}{3}-1}\times\overline{ady+xdy+ydx}}{\overline{ay+xy}^{\frac{2}{3}}}$$, cioè

$$\frac{-ady-xdy-ydx}{3\times\overline{ay+xy}^{\frac{4}{3}}}.$$

Sia $\overline{a-x}\sqrt[3]{\overline{a+x}}$, cioè $\overline{a-x}\times\overline{a+x}^{\frac{1}{3}}$; ſarà la differenza $-dx\times\overline{a+x}^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}\times\overline{a+x}^{\frac{1}{3}-1}\times\overline{a-x}\times dx$, o ſia $-dx\sqrt[3]{\overline{a+x}}+\frac{\frac{1}{3}dx\times\overline{a-x}}{\sqrt[3]{\overline{a+x}}^{2}}$.

Sia $\sqrt{ax+xx+\sqrt[4]{a^4-x^4}}$, cioè

$\overline{ax+xx+\sqrt[4]{a^4-x^4}}^{\frac{1}{2}}$; ſarà la differenza

$$\frac{adx+2xdx-\frac{x^3dx}{\overline{a^4-x^4}^{\frac{3}{4}}}}{2\sqrt{ax+xx+\sqrt[4]{a^4-x^4}}}$$, cioè $$\frac{\overline{adx+2xdx}\times\overline{a^4-x^4}^{\frac{3}{4}}-x^3dx}{2\times\overline{a^4-x^4}^{\frac{3}{4}}\sqrt{ax+xx+\sqrt[4]{a^4-x^4}}}.$$

Sia

Sia $\frac{aa + xx}{\sqrt{ax + xx}}$, farà la differenza

$$\frac{3axxdx + 2x^3dx - a^3dx - 2aaxdx}{2 \times \overline{ax + xx}^{\frac{3}{2}}}.$$

Sia $\frac{x\sqrt{ax + xx}}{a\sqrt{ay - xy}}$, farà la differenza

$$\frac{3aayxdx + 2ayxxdx - 3yx^3dx - aaxxdy + x^4dy}{2a \times \overline{ay - xy}^{\frac{3}{2}} \sqrt{ax + xx}}.$$

29. In quella guifa, che fi prendono le differenze prime delle quantità finite, fi prendono ancora le differenze delle quantità infinitefime del primo ordine, e le differenze delle quantità infinitefime del fecondo, e così fucceffivamente, fervendofi delle fteffe regole, che ô fin'ora fpiegate.

Solo vi farà da riflettere, fe alcuna fluffione prima fia ftata affunta per coftante, e quale effa fia, poichè la di lei differenza farà nulla, e fi dovrà ommettere nel differenziare.

Sia propofta da differenziarfi la formola $ydx - xdy$, e non fia ftata affunta coftante fluffione alcuna, la differenza farà $dxdy + yddx - dxdy - xddy$, cioè $yddx - xddy$. Sia ftata affunta coftante la fluffione dx, farà la differenza $dxdy - dxdy - xddy$, cioè $-xddy$. Sia coftante la fluffione dy, farà la differenza $dxdy + yddx - dxdy$, cioè $yddx$.

Sia

Sia $\frac{ydx}{dy}$, in cui nessuna flussione prima si prenda costante, sarà la differenza $\frac{dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$; presa costante dx, sarà $\frac{dy^2dx - ydxddy}{dy^2}$; presa per costante dy, sarà $\frac{dy^2dx + ydyddx}{dy^2}$, cioè $\frac{dydx + yddx}{dy}$.

Sia $\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz}$, e costante la dz, sarà la differenza $\frac{dydz\sqrt{dx^2 + dy^2} + ydz \times \frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}}{dz^2}$, cioè $\frac{dx^2dy + dy^3 + ydxddx + ydyddy}{dz\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Presa per costante dy, sarà $\frac{dydz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{ydzdxddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - yddz\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz^2}$, cioè $\frac{dx^2dydz + dy^3dz + ydzdxddx - ydx^2ddz - ydy^2ddz}{dz^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Presa per costante dx, sarà $\frac{dydz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{ydz \times dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - yddz\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz^2}$, cioè

cioè $\frac{dx^2 dydz + dy^3 dz + ydzdyddy - ydx^2 ddz - ydy^2 ddz}{dz^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}$

E finalmente presa nissuna flussione costante, sarà la differenza

$$\frac{dydz\sqrt{dx^2 + dy^2} + ydz \times \frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - yddz\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz^2},$$

cioè $\frac{dx^2 dydz + dy^3 dz + ydzdxddx + ydzdyddy - ydx^2 ddz - ydy^2 ddz}{dz^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

E se in questa si cancelleranno tutti i termini, ne' quali si trova la ddz, cioè fatta l'ipotesi di dz costante, si muterà essa nella prima; cancellando quelli, ne' quali si trova la ddy, si muterà nella seconda; e cancellando quelli, ne' quali si trova la ddx, si muterà nella terza, come è chiaro.

Sia $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}$, e costante dx, sarà la differenza

$$\frac{\overline{dx^2 + dy^2 + yddy}\sqrt{xx + yy} - \overline{xdx - ydy} \times \frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}}{xx + yy},$$

cioè $\frac{xxdy^2 + xxyddy + yydx^2 + y^3 ddy - 2xydxdy}{\overline{xx + yy}^{\frac{3}{2}}}$.

Presa

Preſa per coſtante dy, ſarà

$$\frac{\overline{dx^2 + xddx + dy^2}\sqrt{xx + yy} - \frac{\overline{xdx - ydy} \times \overline{xdx + ydy}}{\sqrt{xx + yy}}}{xx + yy},$$

cioè $$\frac{x^3 ddx + xxdy^2 + yydx^2 + yyxddx - 2xydxdy}{\overline{xx + yy}^{\frac{3}{2}}}.$$

E finalmente preſa neſſuna fluſſione coſtante, ſarà

$$\frac{\overline{dx^2 + xddx + dy^2 + yddy}\sqrt{xx + yy} - \frac{\overline{xdx - ydy} \times \overline{xdx + ydy}}{\sqrt{xx + yy}}}{xx + yy},$$

cioè $$\frac{x^3 ddx + xxdy^2 + xxyddy + yydx^2 + yyxddx + y^3 ddy - 2xydxdy}{\overline{xx + yy}^{\frac{3}{2}}}.$$

Sia propoſta da differenziarſi la formola differenziale del ſecondo grado $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$, o ſia $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, e ſi prenda dx coſtante, ſarà la differenza

$$\frac{3 \times dyddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} \times -dxddy + dxdddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy^2}.$$

L'ipoteſi di dy coſtante ripugna per queſta formola, in cui già ſi trova la ddy.

Presa nessuna flussione costante, sarà

$$\frac{3 \times \overline{dxddx + dyddy} \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} \times \overline{-dxddy + dxdddy + ddxddy} \times \overline{dx^2 + dy^2}}{dx^2 ddy^2}$$

Con simil metodo si proceda in tutti gl'altri casi più composti .

CAPO

CAPO II.

Del Metodo delle Tangenti.

30. Alla Curva ADF (*Fig.* 24., *e* 25.) sia tangente in un qualunque punto la retta TDG, e perpendicolare all' asse AB l'ordinata BD nel punto B, alla quale sia infinitamente prossima CF, che prodotta (se fa bisogno) incontri la tangente nel punto G, e si tiri DE parallella all' asse AB. Per quanto è stato dimostrato ne' premessi Teoremi, e suoi Corollarj, la GF sarà infinitesima rispetto ad EF, e sarà pure infinitesima rispetto all' archetto DF la differenza tra DF, e DG; dunque si potranno usurpare per eguali le due EF, EG, siccome le due DF, DG; e però, se sia $AB = x$, $BD = y$, sarà $EF = EG = dy$, $DF = DG = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Ma i triangoli simili GED, DBT ci danno l'analogìa GE, $ED :: DB$, BT, cioè in termini analitici, dy, $dx :: y$, BT, dunque $BT = \frac{ydx}{dy}$, ed ecco la formola generale della sottotangente per qualunque curva.

Nel caso per tanto di una curva data nulla altro rimarrà da farsi, per averne la sottotangente, che dif-

ferenziare l'equazione, ed il valore della dx, o dy sostituirlo nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, con che svaniranno i differenziali, ed averassi il valore della sottotangente espresso in termini finiti, che compete alla data curva per un qualunque punto, e se si voglia per un determinato punto, basterà sostituire in luogo dell'incognite quel valore, che loro compete, rispetto al punto determinato.

31. Dal potersi assumere $EF=EG$, e $DF=DG$, ne viene, che si può considerare il punto G, come se cada in F, cioè, che la tangente DG, l'arco DF, e la sua corda si confondano assieme, vale a dire, che le curve sieno poligoni d'infiniti lati infinitamente piccoli. Questo discorso però procede solo, quando noi ci fermiamo nelle prime differenze; ma se si dovranno computare le seconde, non si confonderà il punto G col punto F essendo appunto GF una seconda differenza. Quindi perchè nel metodo delle tangenti non s'introducono differenziali secondi, farassi giustamente il supposto, che essa tangente si confonda con l'archetto, e sua corda.

32. Lo stesso triangolo GDE ci somministra le formole per l'altre linee analoghe alla sottotangente.

Per la similitudine de' triangoli GED, DBT, sarà

GE,

GE, GD :: DB, DT, cioè dy, $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ :: y, DT; e però $DT = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$, formola generale della tangente.

Sia DN perpendicolare alla curva nel punto D, saranno simili i triangoli GDE, DBN, onde sarà DE, EG :: DB, BN, cioè dx, dy :: y, BN; e però $BN = \frac{ydy}{dx}$, formola generale della sottonormale.

Sarà ancora DE, DG :: DB, DN, cioè dx, $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ :: y, DN; e però $DN = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, formola generale della normale.

Dal punto B si conduca BM normale a DN, e BH normale a DT. Il triangolo GDE sarà simile al triangolo DBM, onde sarà GD, GE :: DB, BM, cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, dy :: y, $BM = \frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, formola generale della linea BM.

Lo stesso triangolo GDE sarà anco simile al triangolo DBH, onde sarà GD, DE :: DB, BH, cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, dx :: y, $BH = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, formola generale della linea BH.

33. La similitudine de' due triangoli GED,

DBT

DBT ci farà scoprire in oltre l'angolo, che fa con l'asse la tangente ad un qualsivoglia punto di curva, conciosiacchè sarà noto l'angolo DTB, qualora sia nota la ragione del seno retto DB al seno del complemento BT, cioè la ragione di GE ad ED, o sia di dy a dx.

Adunque data l'equazione della curva, se si differenzierà, e si risolverà in analogìa, di cui sieno due termini dy, dx, avrassi la ragione de' seni dell' angolo DTB, e però noto l'angolo.

34. In virtù dello stesso discorso nascono le medesime formole anco nelle curve riferite al fuoco, (*Fig.* 26., *e* 27.) solo che si rifletta, che condotta dal fuoco B normale all'ordinata BD la retta BT, che incontri la tangente in T, i triangoli DBT, DGE saranno simili, perchè gl'angoli TBD, DEG sono retti, e l'angolo TDB non è maggiore dell' angolo DGE se non per l'angolo infinitesimo DBG, il che si vede chiaro conducendo GQ normale a TB; adunque si potranno assumere per eguali i due angoli TDB, DGE, ed in conseguenza anco i due BTD, GDE, e però simili i due triangoli DTB, GDE; ma in oltre GF è infinitesima rispetto ad EF, adunque ec.

ESEM-

ESEMPIO I.

35. Sia la curva ADF (*Fig.* 24.) la parabola apolloniana dell'equazione $ax = yy$. Differenziando sarà $adx = 2ydy$, e $dx = \frac{2ydy}{a}$. Sostituito per tanto questo valore in luogo di dx nella formola generale della sottangente $\frac{ydx}{dy}$, avremo $\frac{2yy}{a}$, o pure $2x$, posto in luogo di yy il valore ax dato dall' equazione della curva. La sottotangente adunque nella parabola è doppia dell' assissa, e però se si prenda $AT = AB$, e dal puto T si tiri al punto D la retta TD, essa sarà tangente della curva nel punto D. Se in luogo del valore di dx dato dall'equazione della curva, sostituiremo il valore di dy, cioè $\frac{adx}{2y}$ nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, sarà essa ciò nulla ostante $\frac{2yy}{a}$, come prima, il che basterà d'avere notato in quest'esempio.

Nella stessa parabola si ricerchi la sottonormale BN. La formola generale della sottonormale è $\frac{ydy}{dx}$; ma per l'equazione della curva si â $dx = \frac{2ydy}{a}$, dunque fatta la sostituzione, sarà la sottonormale nella parabola

rabola $= \frac{a}{2}$, cioè la metà del parametro, e però presa $BN = \frac{a}{2}$, e dal punto N condotta al punto D la retta ND, sarà essa normale alla curva in D.

Si ricerchi la tangente DT, la di cui formola generale è $\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$. Per l'equazione della curva abbiamo $dx = \frac{2ydy}{a}$, dunque fatta la sostituzione di questo valore in luogo di dx nella formola, avremo $\frac{y\sqrt{4yydy^2 + aady^2}}{ady} = \frac{y}{a}\sqrt{4yy + aa} = \sqrt{4xx + ax}$, (posto in luogo di yy il valore ax dato dall'equazione) che è la tangente cercata.

Si ricerchi la normale DN. Sostituito il valore di $dx = \frac{2ydy}{a}$ nella formola generale $\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, sarà essa $\frac{y\sqrt{4yydy^2 + aady^2}}{2ydy} = \frac{\sqrt{4yy + aa}}{2} = \frac{\sqrt{4ax + aa}}{2}$, posto in luogo di yy il valore dato dall' equazione.

Si ricerchi la retta BM. Sostituito il valore di $dx = \frac{2ydy}{a}$ nella formola generale $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, sarà essa

$$\frac{aydy}{\sqrt{4yydy^2 + aady^2}} = \frac{ay}{\sqrt{4yy + aa}} = \frac{a\sqrt{ax}}{\sqrt{4ax + aa}}.$$

Si

Si ricerchi la retta *BH*. Sostituito il valore di dx nella formola generale $\frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, sarà essa

$$\frac{2yydy}{\sqrt{4yydy^2 + aady^2}} = \frac{2yy}{\sqrt{4yy + aa}} = \frac{2ax}{\sqrt{4ax + aa}}.$$

Ritrovata la sottotangente, non è necessario alcun uso di formole per ritrovare l'altre linee, sebbene a motivo di esercizio me ne sono quì servita, imperciocchè, essendo nota la *BT*, il triangolo *TBD* rettangolo in *B* ci somministra la tangente *TD*, e la similitudine de' triangoli *TBD*, *DBN*, *DMB*, *DHB* l'altre linee tutte, e però ne' seguenti Esempj applicherò il metodo alle sole sottotangenti.

Se vogliasi l'angolo, che fa la tangente della parabola con l'asse. Presa l'equazione differenziale $adx = 2ydy$, e risoluta in analogìa, troverassi dy, $dx :: a, 2y$, cioè che il seno retto *BD* è al seno del complemento *BT*, come il parametro al doppio dell' ordinata, dovunque siasi il punto *D*; e se si vorrà fissata la tangente ad un punto determinato, per esempio al punto *D*, a cui corrisponda l'assissa $AB = x = \frac{a}{4}$, dall'equazione della curva trovata la y corrispondente ad $x = \frac{a}{4}$, che in questo caso è $y = \frac{a}{2}$, sarà l'analo-

gìa dy, $dx :: a, a$, cioè semiretto l'angolo DTB, quando sia $y = \frac{a}{2}$, o $x = \frac{a}{4}$.

Nel vertice A è $y = 0$, e però l'analogìa per l'angolo della tangente nel vertice sarà $dy, dx :: a, 0$, cioè la ragione di dy a dx infinita, vale a dire il seno del complemento sarà nullo, e però la tangente nel vertice sarà perpendicolare all'asse.

ESEMPIO II.

36. Sia l'equazione generale di tutte le parabole di qualunque grado $x = y^m$, intendendo per m un qualunque numero positivo intiero, o rotto, e che l'unità supplisca alle dimensioni. Differenziando sarà $dx = my^{m-1}dy$, e sostituito questo valore in luogo di dx nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, sarà la sottotangente $= my^m = mx$. Sia $m = 3$, cioè la parabola prima cubica $x = y^3$, sarà la di lei sottotangente $= 3x$. Sia $m = \frac{3}{2}$, cioè la seconda parabola cubica $xx = y^3$, sarà la di lei sottotangente $= \frac{3}{2}x$ ec.

L'equazione differenziale $dx = my^{m-1}dy$ della curva ci dà l'analogìa $dy, dx :: 1, my^{m-1}$; ma posta $y = 0$, se sarà m maggiore dell'unità, l'analogìa sa-

rà

rà dy, dx :: 1, 0, cioè la ragione di dy a dx infinita, e però la tangente nel vertice perpendicolare all'asse; e se sarà m minore dell' unità, sarà l'analogia dy, dx :: 1, $\frac{m}{y^{1-m}}$, cioè posta $y = 0$, dy, dx :: 1, $\frac{m}{0}$, vale a dire la ragione di dy a dx infinitamente piccola, e però la tangente nel vertice parallela all'asse.

ESEMPIO III.

37. Sia la curva DCE, (*Fig.* 28.) di cui si vuole la sottotangente, l'iperbola fra gl'asintoti dell' equazione $xy = aa$. Differenziando sarà $xdy + ydx = 0$, e $dx = -\frac{xdy}{y}$; sostituito per tanto nella formola $\frac{ydx}{dy}$ della sottotangente il valore di dx, sarà la sottotangente $= -x$, valore negativo, e questo vuol dire, che la sottotangente BT dee prendersi della parte opposta alle assisse.

Presa adunque $BT = BA$, e condotta al punto C la retta TC, sarà essa tangente della curva nel punto C.

Poichè nella curva DCE crescendo l'assissa, cala l'ordinata y, s'avrebbe dovuto nel differenziare prendere negativa la differenza dy, ma perchè per la stessa ragione s'avrebbe dovuto prendere negativa la stessa dy anco nella formola generale, si â ommesso di farlo

nell'uno, e nell'altro luogo, giacchè fenza imbarazzarfi co' fegni torna lo fteffo, il che ora avvertito fervirà per gl'altri fimili cafi.

Sia l'equazione generale $x = \frac{1}{y^m}$ a tutte le infinite iperbole fra gl'afintoti, effendo m un qualunque numero pofitivo intero, o rotto. Differenziando averemo $dx = -\frac{my^{m-1}dy}{y^{2m}} = -\frac{mdy}{y^{m+1}}$, e foftituito quefto valore nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, la fottotangente farà $-\frac{m}{y^m}$, o fia $-mx$, per l'equazione della curva.

ESEMPIO IV.

38. Sia la curva ADF (*Fig.* 24.) un circolo del diametro $= 2a$, $AB = x$, $BD = y$, farà l'equazione $2ax - xx = yy$, e differenziando $2adx - 2xdx = 2ydy$, e però $dx = \frac{ydy}{a-x}$, e foftituendo quefto valore nella formola $\frac{ydx}{dy}$, farà la fottotangente $\frac{yy}{a-x}$, cioè $\frac{2ax-xx}{a-x}$, pofto in luogo di yy il valore dato dall'equazione. Sarà dunque la fottotangente nel circolo la quarta proporzionale di $a-x$, di $2a-x$, e della x.

Ma fe il circolo farà dell'equazione $aa - xx = yy$, nel

nel quale (*Fig.* 29.) si prendano le assisse $AB = x$ dal centro, differenziando avremo $-xdx = ydy$, e $dx = -\frac{ydy}{x}$, sostituendo per tanto questo valore nella formola, sarà la sottotangente $= -\frac{yy}{x}$, cioè la terza proporzionale di AB, e BD, ma negativa, vale a dire da prendersi da B verso T.

ESEMPIO V.

39. Sia la curva ADF (*Fig.* 24.) l'Ellissi dell' equazione $ax - xx = \frac{ayy}{b}$, prese le assisse dal vertice A. Differenziando averemo $adx - 2xdx = \frac{2aydy}{b}$, e $dx = \frac{2aydy}{b \times \overline{a - 2x}}$. Sostituito questo valore nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, sarà $\frac{2ayy}{b \cdot \times \overline{a - 2x}}$ la sottotangente, o pure $\frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, posto in luogo di $\frac{ayy}{b}$ il valore $ax - xx$ dato dall'equazione. Fatta $x = \frac{1}{2}a$, metà dell' asse trasverso, nel valore della sottotangente, sarà essa $\frac{2aa}{0}$, cioè infinita; adunque la tangente nel punto, in cui l'asse conjugato taglia la curva, sarà parallela all'asse

traf-

trasverso, il che troveremo esser vero anche cercando, qual sia l'angolo, che essa tangente fa con il medesimo asse trasverso.

Sia generalmente l'equazione alle ellissi di qualunque grado $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a-x}^{\,n}$, intendendo per m, n due numeri positivi intieri, o rotti. Differenziando sarà $\frac{\overline{m+n}}{b} \times ay^{m+n-1}dy = mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^{\,n} - ndx \times \overline{a-x}^{\,n-1} \times x^m$, e però
$dx = \frac{\overline{m+n} \times ay^{m+n-1}dy}{bmx^{m-1} \times \overline{a-x}^{\,n} - bnx^m \times \overline{a-x}^{\,n-1}}$, e sostituito questo valore nella formola generale, sarà essa $\frac{\overline{m+n} \times ay^{m+n}}{bmx^{m-1} \times \overline{a-x}^{\,n} - bnx^m \times \overline{a-x}^{\,n-1}}$, e posto in luogo di $\frac{ay^{m+n}}{b}$ il valore dato dall'equazione, sarà la sottotangente $\frac{\overline{m+n} \times x^m \times \overline{a-x}^{\,n}}{mx^{m-1} \times \overline{a-x}^{\,n} - nx^m \times \overline{a-x}^{\,n-1}}$, e dividendo il numeratore, e denominatore per $x^{m-1} \times \overline{a-x}^{\,n-1}$, sarà finalmente $\frac{\overline{m+n} \times \overline{ax-xx}}{ma-mx-nx}$.

Sia

Sia $m=1$, $n=1$, cioè l'ellissi apolloniana, sarà la sottotangente $\frac{2ax-2xx}{a-2x}$, come sopra. Sia $m=3$, $n=2$, cioè l'equazione $\frac{ay^5}{b}=x^3\times\overline{a-x}^2$, sarà la sottotangente $\frac{5ax-5xx}{3a-5x}$ ec.

Se l'equazione fosse $\frac{ay^{m+n}}{b}=x^m\times\overline{a+x}^n$, esprimerebbe essa tutte le iperbole di qualunque grado riferite agl'assi, prese istessamente le assisse dal vertice A. Operando nello stesso modo, troveremo essere la sottotangente $\frac{\overline{m+n}\times\overline{ax+xx}}{ma+mx+nx}$, diversa solo dall'antecedente ne' segni, siccome diversa solo ne' segni è l'equazione, da cui si ricava.

Sia $m=1$, $n=1$, cioè l'iperbola apolloniana, sarà la sottotangente $\frac{2ax+2xx}{a+2x}$. Sia $m=3$, $n=2$, cioè l'equazione $\frac{ay^5}{b}=x^3\times\overline{a+x}^2$, sarà la sottotangente $\frac{5ax+5xx}{3a+5x}$ ec.

40. Da questo metodo delle tangenti si ricava ancora la maniera di riconoscere, se le curve ânno asin-

asintoti, ed il modo di condurli, quando essi sono inclinati all'asse, giacchè nel caso più semplice, che ad esso sieno, o perpendicolari, o paralleli, abbastanza si â parlato nel Libro I. Capo 5.

ESEMPIO I.

41. Sia la curva ADE (*Fig.* 30.) dell'equazione di sopra $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a+x}^{\,n}$, la di cui sottotangente $TB = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax+xx}}{ma+mx+nx}$, sarà dunque l'intercetta $AT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax+xx}}{ma+mx+nx} - x$, cioè $\frac{nax}{ma+mx+nx}$.

Egli è chiaro, che la tangente TD diverrà asintoto, quando toccando ella la curva in infinita distanza, cioè quando l'assissa $AB = x$, essendo infinita, l'intercetta AT rimanga finita; ma posta x infinita nell'espressione di AT, il primo termine ma del denominatore è infinitamente minore degl'altri, e però da trascurarsi, onde in questo caso sarà $AT = \frac{nax}{mx+nx} = \frac{na}{m+n}$, quantità finita, adunque la curva â l'asintoto, il quale partirà dal punto M, fatta $AM = \frac{na}{m+n}$. Ma per condurlo:

durlo: si alzi AH normale ad AB, e sia egli per esempio MHP; ciò posto, se si prenda x infinita, sarà dx, $dy :: MA, AH$, ed in questa supposizione di x infinita l'equazione della curva $ay^{m+n} = x^m \times \overline{a+x}^n$ (essendo a nullo rispetto ad x) si muta in quest' altra $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^{m+n}$, o sia, estraendo la radice, e facendo per maggior comodo $m+n=t$, $y\sqrt[t]{a} = x\sqrt[t]{b}$, ma differenziando è $dy\sqrt[t]{a} = dx\sqrt[t]{b}$; dunque dx, $dy :: \sqrt[t]{a}, \sqrt[t]{b}$, dunque $MA, AH :: \sqrt[t]{a}, \sqrt[t]{b}$, e perchè $MA = \frac{na}{t}$, sarà $\frac{na}{t}, AH :: \sqrt[t]{a}, \sqrt[t]{b}$, cioè $AH = \frac{na\sqrt[t]{b}}{t\sqrt[t]{a}}$. Se per tanto si prenda $AM = \frac{na}{t}$, e si alzi la normale $AH = \frac{na\sqrt[t]{b}}{t\sqrt[t]{a}}$, e si conduca infinita la retta MHP, sarà essa l'asintoto della curva ADE.

Sia $m=1$, $n=1$, cioè l'equazione $\frac{ayy}{b} = ax + xx$ all'iperbola apolloniana, sarà $t=2$, e però $AM = \frac{a}{2}$,

$AH = \frac{a\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{2}$, cioè AM la metà dell' asse trasverso, ed AH la metà del conjugato, appunto come dalle sezioni coniche si sa, dover essere.

ESEMPIO II.

42. Sia ADE la curva dell' equazione $y^3 - x^3 = axy$, fatte le $AB = x$, $BD = y$. Differenziando avremo $3yydy - 3xxdx = axdy + aydx$, e però $\frac{ydx}{dy} = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay}$, ed $AT = \frac{ydx}{dy} - x = \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3xx + ay}$, o pure, posto in luogo di $3y^3 - 3x^3$ il valore $3axy$ dato dall' equazione della curva, sarà $AT = \frac{axy}{3xx + ay}$; e fatta x infinita, cioè nel caso dell' asintoto, in cui AT diviene AM, il termine ay è nullo rispetto a $3xx$, adunque sarà $AM = \frac{axy}{3xx} = \frac{ay}{3x}$.

Ma poichè nell' equazione proposta non si possono separare le indeterminate, nè in conseguenza determinare il valore della AM; si ponga $AM = \frac{ay}{3x} = t$, (il medesimo, o simile artificio potrà servire in altri

casi

casi della stessa natura) sarà $y = \frac{3tx}{a}$, e sostituito questo valore nell' equazione proposta, sarà essa $\frac{27t^3x^3}{a^3} - x^3 = 3txx$, ma quando sia x infinita, l'ultimo termine è nullo rispetto agl' altri; adunque sarà $\frac{27t^3x^3}{a^3} - x^3 = 0$, cioè $t = \frac{a}{3}$. Presa adunque $AM = \frac{a}{3}$, dal punto M si dovrà condurre l'asintoto. Deve in oltre essere MA, $AH :: dx$, dy, e l'equazione proposta $y^3 - x^3 = axy$, o sia $y^3 = x^3 + axy$ si riduce ad essere $x^3 = y^3$, cioè $x = y$, quando sia x infinita, e però $dx = dy$; adunque fatta $MA = AH$, se dal punto M per lo punto H si condurrà una retta, essa sarà l'asintoto della curva.

Aggiungo in oltre, che deve necessariamente la linea AT accostarsi ad un certo limite, oltre il quale non possa trascorrere, e che il menzionato limite talora è infinitesimo, o nulla. Eccone un' esempio semplice.

Sia l'iperbola equilatera BCF, (*Fig.* 31.) e posta $AB = a$, $AD = x$, $DC = y$, abbiasi l'equazione $aa + xx = yy$, e differenziando, $xdx = ydy$. Quindi la sottotangente $ED = \frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{x} = \frac{aa + xx}{x}$, e conseguentemente $ED - AD = \frac{aa + xx}{x} - x = \frac{aa}{x} = AE$.

Posta $x = 0$, si trova AE infinita, e la tangente

 del

del punto B parallela all'asse AD; e fatta $x = \infty$, si à $AE = 0$. Per la qual cosa il punto E scorre tutta la AE infinitamente prodotta, e si ferma nella origine A, oltre cui non trascorre, quantunque la nostra curva volti il convesso all'asse. L'asintoto adunque AG nasce dal punto A, e forma con la linea delle assisse un'angolo semiretto, stante che nella equazione locale $aa + xx = yy$, posta $x = \infty$; svanisce la costante aa, e diventa $xx = yy$, o sia $x = y$.

43. Fino ad ora è stato da me supposto, che l'angolo delle coordinate sia retto. Che se egli sia ottuso, o acuto, poste come sopra $BC = x$, $CE = y$, $CD = dx$, $OG = dy$, (*Fig.* 32., *e* 33.) la sottotangente sarà nè più nè meno $\frac{ydx}{dy}$, perchè saranno sempre simili i due triangoli GEO, EAC; ma l'altre formole avranno bisogno di riforma.

Nel triangolo EOG l'angolo O eguale all'angolo ACE si suppone noto, adunque dal punto G abbassata GI normale ad AD; e prodotta, se fa bisogno, EO in H, nel triangolo GOH sarà noto l'angolo GOH, ma l'angolo in H è retto, quindi noto l'angolo OGH, e però noto in spezie il triangolo OGH, cioè data la ragione di GO a GH, e sia quella di a ad m, sarà pertanto $a, m :: dy, GH = \frac{mdy}{a}$; sarà pure data la ragione

di

di GO ad OH, e sia quella di a ad n, e però a, $n :: dy$, $OH = \frac{ndy}{a}$; adunque $EH = dx \pm \frac{ndy}{a}$ (cioè il segno positivo nella *Fig.* 32., ed il negativo nella *Fig.* 33.), quindi $\overline{EG}^2 = \frac{aadx^2 \pm 2andxdy + nndy^2 + mmdy^2}{aa}$; ma se OG si esprime per a, GH per m, OH per n, sarà $aa = mm + nn$, ed $aady^2 = mmdy^2 + nndy^2$, adunque sostituito questo valore nell' espressione di $\overline{EG}^2$, sarà $\overline{EG}^2 = \frac{aadx^2 \pm 2andxdy + aady^2}{aa}$, ed $EG = ds = \sqrt{\frac{adx^2 \pm 2ndxdy + ady^2}{a}}$, espressione dell' elemento della curva. Ciò posto, per la similitudine de' triangoli EGO, AEC, sarà GO, $GE :: EC$, EA, cioè dy, $\sqrt{\frac{adx^2 \pm 2ndxdy + ady^2}{a}} :: y$, $EA = \frac{y}{dy}\sqrt{\frac{adx^2 \pm 2ndxdy + ady^2}{a}}$, formola della tangente.

Sia TE normale alla curva, ed ES al diametro AI, per la similitudine de' triangoli GOH, ECS, avremo $ES = \frac{my}{a}$, e $CS = \frac{ny}{a}$; e per la similitudine de' triangoli GEH, EST, avremo EH, $HG :: ES$, ST, cioè $\frac{adx \pm ndy}{a}$, $\frac{mdy}{a} :: \frac{my}{a}$, $ST = \frac{mmydy}{a \times adx \pm ndy}$,

e

e però $CT = \frac{mmydy}{a \times \overline{adx \pm ndy}} \pm \frac{ny}{a} = \frac{mmydy + nnydy \pm anydx}{a \times \overline{adx \pm ndy}}$ $= \frac{aydy \pm nydx}{adx \pm ndy}$, formola della sottonormale.

In simil modo si ridurranno l'altre formole, il che basti d'aver indicato.

44. Ma le curve, delle quali si vogliono le tangenti, possono esser trascendenti, cioè non esprimibili da alcuna equazione algebraica, ma dipendenti dalla rettificazione d'altre curve non rettificabili. Sia la curva APB, (*Fig.* 34.) di cui si sappia condurre la tangente PTK ad un qualunque punto P, e prodotta in M la QP normale ad AQ, la relazione di MP all'arco PA sia espressa da un'equazione qualunque, e si ricerchi la tangente MT della curva CMA descritta da' punti M; condotta qm infinitamente prossima a QM, ed MR parallela a PT, e supposto rettificabile l'arco AP, cioè $= x$, e chiamata $PM = y$, sarà $Pp = dx$, $Rm = dy$, e simili i due triangoli mRM, MPT, e però mR, $RM :: MP$, PT, cioè dy, $dx :: y$, $PT = \frac{ydx}{dy}$, formola per la sottangente della curva CMA da prendersi sulla tangente della curva APB. Dall'equazione data della curva AMC si ritroverà il valore della dx, o dy da sostituirsi nella formola, e si farà il rimanente al solito.

ESEM-

ESEMPIO.

45. Mentre il circolo DPC si arruota uniformemente sulla retta AB cominciando dal punto A, (*Fig.* 35.) il punto C della sua periferìa, che nel principio del moto cade sul punto A, lasci impressa nel piano la traccia del suo cammino, e si continovi questo moto sino a che pervenga di nuovo il punto C nella retta AB; descriverà esso una curva ACB, la quale dalla sua generazione viene chiamata la *Cicloide*; e dicesi Cicloide ordinaria, quando il circolo si muova talmente sulla retta AB, che tutta l'abbia esattamente misurata colla sua periferìa dopo, che il punto C da A sia giunto in B per modo, che sia AB eguale alla periferìa dello stesso circolo. Dicesi Cicloide allungata quando il moto sia tale, che la retta AB sia maggiore della periferìa del circolo; e finalmente Cicloide contratta quando la stessa AB sia minore della periferìa.

Dalla descrizione di questa curva chiaramente si vede, che condotta da un qualunque punto la retta MQ parallela ad AB, avrà l'intercetta MP fra la curva, ed il circolo CPD all' arco CP quella ragione, che â la retta AB a tutto il circolo.

Ed in fatti sia il circolo generatore nelle due posizioni EMF, DPC; condotte le corde ME, PD,

poi-

poichè sono eguali gli archi EM, DP, saranno eguali, e parallele le corde EM, DP, e però sarà $MP = ED$; ma per la natura della curva è AE, $EM :: AD$, $EMF :: AB$, $EMFE$, e nella stessa ragione è pure ED ad MF; ed $MF = PC$, $ED = MP$, dunque sarà $MP, PC :: AD, EMF :: AB$, $EMFE$. Se però si chiami la retta $AB = a$, la periferia $EMFE$ del circolo generatore $= b$, ed un qualunque arco CP per assissa $= x$, l'ordinata $PM = y$, sarà l'equazione della curva cicloide $\frac{by}{a} = x$.

Avuta l'equazione alla curva, la differenzio, per ritrovare la sottotangente, e però $\frac{bdy}{a} = dx$, e sostituito questo valore in luogo di dx nella formola $\frac{ydx}{dy}$, sarà $PT = \frac{by}{a} = x$. Presa adunque sulla tangente PK (*Fig.* 34.) del circolo, che si suppone condotta, una porzione PT eguale all'arco AP del circolo, e condotta al punto M la retta TM, essa sarà tangente della cicloide nel punto M.

Che se in oltre la cicloide sia l'ordinaria; poichè in questo caso si â $b = a$, e però $y = x$, sarà $PM = PT$, e l'angolo $PTM = PMT$; ma l'angolo TPQ esterno è doppio dell' angolo TMP, e gl'angoli TPA, APQ (per la 32., e 29. prop. del 3. d'Euclide) sono eguali,

li, dunque sarà l'angolo APQ eguale all'angolo TMP, e però la tangente MT parallela alla corda PA.

46. Senza supporre la tangente della curva APB (*Fig.* 34.) si potrà avere la sottotangente della curva AM presa nell'asse KAB. Sia $AQ = x$, $QP = y$, l'arco $AP = s$, $QM = z$, e la relazione dell'arco AP all'ordinata MP sia espressa da un'equazione qualunque. Sia qm infinitamente prossima alla QM, ed MS parallela ad AB, sarà $MS = dx$, $Sm = dz$, e la similitudine de' triangoli mSM, MQN ci darà dz, $dx :: z$. $QN = \frac{zdx}{dz}$, formola per la sottotangente.

Se in luogo di assumere per ordinata $QM = z$, si prenda $PM = u$, condotta MR parallela all'archetto Pp, sarà $mR = du$, $RS = po = dy$, e però $MS = du + dy$, ed i triangoli simili mSM, MQN ci daranno $du + dy$, $dx :: u + y$, $QN = \frac{\overline{u+y} \times dx}{du + dy}$, altra formola della sottotangente.

ESEMPIO I.

47. Sia la curva APB (*Fig.* 34.) un circolo del diametro $= 2r$, e la ragione di PM all'arco PA sia quella di a alla b, cioè la curva AMC sia la cicloide. Chiamate $AQ = x$, $QP = y$, $QM = z$, l'arco $AP = s$,

e condotta mq infinitamente proffima ad MQ, MR parallella a Pp; MS, Po parallele ad AB, farà $mS = dz$, $RS = po = dy$, $Pp = ds$, ed mR differenza di MP farà $dz - dy$. Ma poichè, per la proprietà della curva, abbiamo MP all'arco PA, come a a b, nella ftessa ragione faranno ancora i differenziali loro mR, pP; e però farà $dz - dy$, $ds :: a, b$, cioè $\frac{ads}{b} = dz - dy$; ma $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, e per la proprietà del circolo $y = \sqrt{2rx - xx}$, dunque $dy = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{2rx - xx}}$, e $dy^2 = \frac{rrdx^2 - 2rxdx^2 + xxdx^2}{2rx - xx}$, quindi $ds = \frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}}$.

Surrogati per tanto quefti valori in luogo di ds, e dy nell' equazione $\frac{ads}{b} = dz - dy$, avremo $dz = \frac{ardx + brdx - bxdx}{b\sqrt{2rx - xx}}$, equazione differenziale della cicloide.

Softituito adunque il valore di dz dato dall' equazione nella formola $\frac{zdx}{dz}$ della fottotangente, averemo $QN = \frac{bz\sqrt{2rx - xx}}{ar + br - bx}$.

Che fe la cicloide fia l'ordinaria, farà $a = b$, e però

però $QN = \frac{z\sqrt{2rx - xx}}{2r - x}$, cioè $2r - x$, $\sqrt{2rx - xx} :: z$, QN, o sia $2r - x$, $y :: z$, QN; ma per la proprietà del circolo è $2r - x$, $y :: y$, x, adunque sarà y, $x :: z$, QN, cioè QP, $QA :: QM$, QN, e però sarà MN parallela a PA.

ESEMPIO II.

48. Sia la curva APB una parabola, la di cui equazione $px = yy$, poste $AQ = x$, $QP = y$, e sia l'arco $AP = s$, $PM = u$, e la ragione di MP all'arco PA sia quella di a alla b, sarà pure mR, $Pp :: a$, b; cioè du, $ds :: a$, b, e però $\frac{ads}{b} = du$. Ma nella parabola $y = \sqrt{px}$, e $dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$, dunque $ds = \frac{dx\sqrt{4px + pp}}{2\sqrt{px}}$; quindi surrogato questo valore in luogo di ds nell'equazione $\frac{ads}{b} = du$, l'equazione alla curva AMC sarà $\frac{adx\sqrt{4px + pp}}{2b\sqrt{px}} = du$. Presa per tanto la formola della sottotangente $\frac{\overline{u + v} \times dx}{du + dy}$, che a questo

 caso

caso conviene, e fatte le sostituzioni in luogo di du, e dy sarà $QN = \frac{\overline{u+y} \times 2b\sqrt{px}}{a\sqrt{4px+pp}+bp}$; ma $y = \sqrt{px}$, per la proprietà della curva APB, ed $\frac{as}{b} = u$, per la proprietà della curva AMC; dunque $QN = \frac{2as\sqrt{px}+2bpx}{a\sqrt{pp+4px}+bp}$.

49. Dal diverso modo, con cui molte curve si generano, nascono diverse dalle ritrovate le formole delle sottotangenti loro, benchè il metodo per ritrovarle sia simile. Basterà il ricercarle in alcune per fare idea della maniera, e dell'artifizio, che dee usarsi in qualunque incontro; e però date le due curve AQC, BCN (*Fig.* 36.) al comune diametro TF, alle quali si sappiano condurre le tangenti, sia un'altra curva MC tale, che la relazione delle ordinate PQ, PM, PN rispetto ad un qualunque punto M sia espressa da una qual si sia equazione, e si dimandi la tangente MT di un qualunque punto M. Si conduca pS infinitamente prossima a PN, e le NS, MR, QO parallele ad AB, e sia $PE = s$, $PF = t$, cognite per la supposizione, $PQ = x$, $PM = y$, $PN = z$. Per la similitudine de' triangoli QPE, qOQ, sarà $QO = \frac{sdx}{x} = MR = NS$, e per la similitudine de' triangoli mRM, MPT, sa-

rà $PT = \frac{sydx}{xdy}$, formola della ſottotangente; ma perchè differenziando l'equazione della curva MC, a fine di avere il valore della dx da ſoſtituirſi in eſſa formola, ſarà egli dato per dy, e dz, non ſi averà eſſa ſottotangente in termini finiti. Si rifletta adunque, che i triangoli ſimili NSn, NPF ci danno $NP, PF :: nS, SN$, cioè $z, t :: \pm dz$, $SN = \pm \frac{tdz}{z}$ (cioè il ſegno poſitivo alla dz, ſe creſcendo x, ed y, creſce la z; ed il ſegno negativo, ſe creſcendo x, ed y, la z cala). Ma è anco $SN = \frac{sdx}{x}$, dunque $\pm \frac{tdz}{z} = \frac{sdx}{x}$, e però $dz = \pm \frac{szdx}{tx}$. Poſto adunque in luogo di dz queſto valore nell' equazione differenziata della curva MC, ſi averà un valore di dx dato per dy, il quale ſoſtituito nella formola della ſottotangente $\frac{sydx}{xdy}$ farà ſvanire le differenze, e la ſottotangente ſarà eſpreſſa in termini finiti.

ESEMPIO I.

50. Sia $xz = yy$ l'equazione della curva MC; differenziando ſarà $zdx + xdz = 2ydy$, e ſoſtituito in luogo di dz il valore $\pm \frac{szdx}{tx}$, ſarà $zdx \pm \frac{szdx}{t} = 2ydy$,

e

e però $dx = \frac{2tydy}{tz \pm sz}$; nella formola della sottotangente $\frac{sydx}{xdy}$ surrogato per tanto, in luogo di dx, questo valore, sarà $PT = \frac{2styy}{tzx \pm szx} = \frac{2st}{t \pm s}$, quando si ponga in vece di yy il valore xz. Sia ora la curva AQC una parabola del parametro $= b$; la curva BCN un circolo del diametro $AB = 2a$. Se adunque il punto N cade nella periferìa del primo quadrante principiando da A, in cui la dz è positiva, la formola della sottotangente PT sarà $\frac{2st}{t + s}$, e la sottotangente del circolo sarà $\frac{2aq - qq}{a - q} = t$ (chiamata $AP = q$), e quella della parabola sarà $2q = s$; posti adunque questi valori in luogo di t, e di s nell' espressione $\frac{2st}{t + s}$, avremo $PT = \frac{8aq - 4qq}{4a - 3q}$.

Che se il punto N cade nella periferìa dell' altro quadrante, sarà dz negativa, e la formola della sottotangente PT sarà $\frac{2st}{t - s}$; ma in questo caso la sottotangente del circolo è $\frac{2aq - qq}{q - a} = t$, e della parabola

rimane

rimane $2q = s$, e però fatte le sostituzioni de' valori di t, e di s nell'espressione $\frac{2st}{t-s}$, avremo $PT = \frac{8aq - 4qq}{4a - 3q}$, come nel primo caso.

52. Ma quando siasi denominata AP, essendo AQ una parabola, sarà $PQ = x = \sqrt{bq}$; ed essendo BCN un circolo, sarà $PN = z = \sqrt{2aq - qq}$, adunque l'equazione $yy = zx$ della curva MC sarà $yy = q\sqrt{2ab - bq}$, e data così l'equazione per le due coordinate AP, PM, troverassi la sottotangente PT con le solite ordinarie formole $\frac{ydq}{dy}$. Differenziando adunque l'equazione $yy = q\sqrt{2ab - bq}$, sarà $ydy = \frac{4abdq - 3bqdq}{4\sqrt{2ab - bq}}$; quindi moltiplicando per y il numeratore, e denominatore della formola $\frac{ydq}{dy}$, onde sia $\frac{yydq}{ydy}$, e sostituendo in luogo di yy, e di ydy i rispettivi valori, sarà $\frac{yydq}{ydy} = \frac{8aq - 4qq}{4a - 3q} = PT$, come prima.

53. Sia più generalmente $x^m z^n = y^{m+n}$ l'equazione della curva MC, differenziando sarà $mz^n x^{m-1} dx + nx^m z^{n-1} dz = \overline{m+n} \times y^{m+n-1} dy$, e ponendo in luogo

luogo di dz il valore $\pm \frac{szdx}{tx}$, sarà

$$\frac{tmz^{n} x^{m-1} dx \pm snx^{m-1} z^{n} dx}{t} = \overline{m+n} \times y^{m+n-1} dy,$$

e però $dx = \frac{\overline{mt+nt} \times y^{m+n-1} dy}{\overline{mt \pm ns} \times z^{n} x^{m-1}}$; adunque $PT = \frac{sydx}{xdy} = \frac{\overline{mst+nst} \times y^{m+n}}{\overline{mt \pm ns} \times z^{n} x^{m}} = \frac{mst+nst}{mt \pm ns}$, quando si ponga in luogo di y^{m+n} il valore $x^{m} z^{n}$.

54. Se le due curve AC, BCN diverranno linee rette , nel caso dell'equazione semplice $xz = yy$ della curva MC sarà essa una delle Sezioni Coniche d'Apollonio, come si è veduto al Lib. I. Cap. III. num. 135., cioè un Ellissi quando l'ordinata CD cade fra i punti A, B ; un'Iperbola quando cade dall'una , o dall'altra parte ; ed in fine una Parabola quando i punti A, B sono infinitamente lontani l'uno dall'altro , cioè quando l'una delle rette linee AC, BC è parallela al diametro . Da ciò manifestamente si vede , che nelle stesse circostanze saranno le medesime curve coniche , ma di grado superiore in infinito , quando l'equazione alla curva MC sia la generale $x^{m} z^{n} = y^{m+n}$.

55. Data la curva AP (*Fig.* 37.) con l'origine in A, di cui si sappia condurre la tangente , sia un'altra curva CMD tale , che condotta da un punto dato

F

F la retta FMP in qualunque modo, la relazione di FM alla porzione AP sia espressa da un' equazione qualunque, e debbasi ritrovare la tangente della curva CMD.

Sia PH tangente della curva APB nel punto P, e si conduca FH normale ad FP, ed Fp infinitamente prossima, e col centro F si descrivano gl'archetti infinitesimi MR, PO, e la ricercata tangente della curva CMD sia MT. Si chiamino $PH = t$, $FH = s$, $FM = y$, $FP = z$, e l'arco $AP = x$. Poichè per gl'archi infinitesimi possono assumersi i loro seni retti, sarà il triangolo MRm rettangolo in R, e perchè l'angolo MmR non è diverso dall' angolo TMF, se non per l'angolo infinitesimo MFm, si potranno considerare simili i due triangoli MRm, TFM, e per la stessa ragione simili i due triangoli POp, HFP; adunque sarà mR, $RM :: MF$, FT, cioè dy, $MR :: y$, FT, ed $FT = \frac{MR \times y}{dy}$, onde per avere il valore di FT conviene avere prima quello di MR, che si averebbe, se fosse nota PO; ma per i triangoli simili PFH, POp, sarà PH, $FH :: Pp$, PO, cioè t, $s :: dx$, $OP = \frac{sdx}{t}$, e per i settori simli FPO, FMR, sarà FP, $PO :: FM$, MR, cioè z, $\frac{sdx}{t} :: y$, $MR = \frac{sydx}{zt}$, quindi $FT = \frac{syydx}{tzdy}$, formola della sottotangente; la quale, se si sostituisca

luogo di dx il valore dato dall'equazione differenziata della curva CMD, farà efpreffa in termini finiti.

ESEMPIO I.

56. Sia il circolo $ABCD$ (*Fig.* 38.) del centro H, raggio HA, e mentre il raggio HA fiffo nel centro fi muove uniformemente, defcrivendo il punto A la periferìa $ABCD$, fi muova il punto H uniformemente ful raggio HA in modo, che reftituitofi il raggio nella prima fituazione HA il punto H abbia percorfo tutto il raggio, e fia in A; defcriverà il punto H la curva $HEcA$, che dicefi la *Spirale d'Archimede*. Dalla generazione di quefta curva è facile a vedere, che un qualunque arco AB del circolo farà alla corrifpondente porzione HE del raggio, come tutto il circolo a tutto il raggio. Chiamato adunque il raggio $= r$, la periferìa del circolo $= c$, l'arco $AB = x$, e l'ordinata $HE = y$, farà $x, y :: c, r$, e però $y = \frac{rx}{c}$, equazione della fpirale, in cui le ordinate fono dal punto fiffo H. Ciò premeffo, fi voglia la tangente ET della fpirale: poichè in quefto cafo la FP della *Fig.* 37. è il raggio HB del circolo, farà $z = r$, e le due, PH tangente, ed FH fottotangente, nella fteffa *Fig.* 37. fono in quefta ambedue perpendicolari al raggio HB (per la

natura

natura del circolo), ed in conseguenza tra loro parallele, e però eguali; onde sarà $s = t$, adunque la formola generale $\frac{syydx}{tzdy}$ sarà in questo caso $\frac{yydx}{rdy}$; quindi differenziando l'equazione $y = \frac{rx}{c}$, sarà $dy = \frac{rdx}{c}$, e sostituito nella formola il valore di dx, sarà essa $\frac{cyy}{rr} = HT$; o pure posto in luogo di y il valore $\frac{rx}{c}$, sarà $\frac{xy}{r} = HT$. Descritto adunque col centro H, raggio $HE = y$ l'arco EQ, e presa HT eguale all'arco EQ, sarà essa la sottotangente, perchè per la similitudine de' settori HEQ, HBA, sarà HA, $AB :: HQ$, QE; cioè r, $x :: y$, $QE = \frac{xy}{r}$.

Se in luogo di essere l'equazione $y = \frac{rx}{c}$, sia $y^m = \frac{r^m x}{c}$, cioè la periferia all'arco AB, come una qualunque potestà m intiera, o rotta del raggio ad egual potestà dell'ordinata, differenziata l'equazione, ci darà $dx = \frac{mcy^{m-1}dy}{r^m}$, ed $ydx = \frac{mcy^m dy}{r^m}$; e fatta la sostituzione nella formola $\frac{yydx}{rdy}$ della sottotangente, sarà essa $\frac{mcy^{m+1}}{r^{m+1}} = HT$, ma $y^m = \frac{r^m x}{c}$, dunque $\frac{mxy}{r} = HT = m \times EQ$.

57. Più semplice si averà la formola della sottotangente, se l'equazione della curva APB (*Fig.* 37.) sia data dalla relazione di FM ad FP; poichè i triangoli simili pOP, PFH, ci danno $PO = \frac{sdz}{z}$, ed i settori simili FPO, FMR ci danno $MR = \frac{sydz}{zz}$, e finalmente i triangoli simili MRm, TFM ci daranno $FT = \frac{syydz}{zzdy}$.

ESEMPIO II.

58. Sia la curva CMD al di sopra di APB, il che non fa alcuna alterazione (*Fig.* 39.), ed APB sia una retta linea, ed FM, FP sieno sempre diverse fra loro per la stessa quantità, cioè PM costante $= a$, sarà $y - z = a$ l'equazione della curva, che è la Concoide di Nicomede, il di cui polo F, ed AB l'asintoto. Differenziando l'equazione, sarà $dy = dz$, quindi la sottotangente $FT = \frac{syy}{zz}$.

Condotta adunque ME parallela a PA, ed MT parallela a PE, sarà MT tangente della curva in M; imperciocchè sarà $FA = s$, $FE = \frac{sy}{z}$, ed $FT = \frac{syy}{zz}$.

59. Data all'asse EAT la curva qualunque AM; (*Fig.* 40.) di cui si sappia condurre la tangente MH ad un qualunque punto M, e dato fuori della curva il punto F, da cui sia condotta la retta FPM; se s'immagineremo, chè

che aggirandosi la retta FPM sul punto F immobile, faccia muovere sulla retta ET il piano PAM sempre parallelo a se stesso, rimanendo la intercetta PA sempre la stessa: il punto M, che è la comune intersecazione delle due linee FM, AM, descriverà con questo moto una curva CMD, di cui si domanda la tangente. Si muova il piano PAM, e nel primo istante arrivi nella posizione infinitamente prossima pam; e si conduca SRm parallela ad ET. La similitudine de' triangoli MRm, MHT ci darebbe la retta HT, che determina la tangente ricercata, se fossero noti i lati MR, Rm. Per averli adunque, chiamata FP, o $Fp = x$; FM, o $Fm = y$, $Pp = dz$, e le note $PA = a$, $MH = t$, $PH = s$; egli è chiaro, che sarà $Pp = Aa = Rm = dz$, e per i triangoli simili FPp, FSm sarà $Fp, Pp :: Fm, Sm$, cioè $x, dz :: y$, $Sm = \frac{ydz}{x}$, dunque $SR = \frac{ydz - xdz}{x}$; e per i triangoli simili MPH, MSR, sarà $HP, HM :: RS, RM$, cioè $s, t :: \frac{ydz - xdz}{x}$, $MR = \frac{tydz - txdz}{sx}$; finalmente, per i triangoli simili MRm, MHT, sarà $MR, Rm :: MH, HT$, cioè $\frac{tydz - txdz}{sx}, dz :: t$, $Ht = \frac{sx}{y - x}$.

Dal punto F si conduca FE parallela alla tangente MH, e si prenda $HT = PE$, tirata TM, sarà essa tangente della curva nel punto M. Imperocchè per i triangoli simili PMH, PFE, sarà $PM, PH :: PF, PE$, cioè $y - x, s :: x, \frac{sx}{y - x} = PE = HT$.

60. E' ſtato dimoſtrato al num. 136. Cap. III. Lib. I. che ſe la linea AM foſſe una retta, la curva CMD ſarebbe l'iperbola, che averebbe ET per uno de' due aſintoti. Se AM foſſe un circolo col centro P, la curva CMD ſarebbe la Concoide di Nicomede, il di cui polo F, e l'aſintoto ET. E ſe finalmente AM foſſe una parabola, la curva CMD ſarebbe *la Compagna della Paraboloide di Carteſio*, cioè una delle due *Concoidi Paraboliche*.

61. Al diametro AP (*Fig.* 41.) ſia una curva qualunque AN, a cui ſi ſappia condurre la tangente, ed un punto fiſſo F fuori di lei, e ſia un' altra curva CMD tale, che condotta, come ſi vuole, dal punto F la retta $FMPN$, la relazione tra FN, FP, ed FM ſia eſpreſſa da un' equazione qualunque; ſi dimanda la tangente MT di un qualunque dato punto M.

Per lo punto F ſi conduca HK perpendicolare ad FN, che incontra in K il diametro AP prodotto, ed in H la tangente data NH. Sia FQ infinitamente proſſima ad FN, e col centro F ſi deſcrivano gl'archi MR, Po, NQ. Chiamate $FK = s$, $FH = t$, $FP = x$, $FM = y$, $FN = z$, ſarà $mR = dy$, $po = dx$, $Qn = -dz$, e per la ſimilitudine de' triangoli NQn, NFH, ſarà $NQ = -\frac{tdz}{z}$; e per la ſimilitudine de' ſettori FNQ, FMR, ſarà $MR = -\frac{tydz}{zz}$; e finalmente, per la ſimi-

litu-

litudine de' triangoli MRm, MFT, sarà $FT = -\frac{yytdz}{zzdy}$, formola ricercata della sottotangente. Ma quì pure si rifletta, che differenziando l'equazione della curva, il valore di dy da sostituirsi nella formola sarà dato per dx, e dz, quindi non spariranno i differenziali; tuttavìa però la similitudine de' settori FNQ, FPo ci darà $Po = -\frac{txdz}{zz}$, e la similitudine de' triangoli Pop, PFK l'analogìa dx, $-\frac{txdz}{zz} :: x$, s, quindi l'equazione $szzdx = -txxdz$, e però $-dz = \frac{szzdx}{txx}$; posto adunque nella formola della sottotangente il valore di dy, cavato dall' equazione differenziata della curva, indi in luogo di dz questo valore, spariranno le differenze, e si averà la sottotangente in termini finiti.

Se la linea AP in luogo di esser retta fosse una curva, condotta la tangente PK, col medesimo discorso si troverebbe lo stesso valore della sottotangente FT.

ESEMPIO.

62. La curva AN (*Fig.* 42.) sia un circolo, il quale passi per lo punto F, ed in tal modo posto, che conducendo dal puto F la FB normale ad AP prodotta, essa passi per lo centro G di esso circolo, e sia sem-

ſempre PN eguale a PM, la curva CMD della Figura antecedente, cioè FMA in queſta ſarà la Ciſſoide di Diocle, la di cui equazione ſarà $z + y = 2x$. Differenziando adunque averemo $dz + dy = 2dx$, e però $dy = 2dx - dz$, e poſto in luogo di dy queſto valore nella formola $-\frac{yytdz}{zzdy}$ della ſottotangente, ſarà $-\frac{yytdz}{2zzdx - zzdz}$, e finalmente ſurrogato in luogo di $-dz$ il valore $\frac{szzdx}{txx}$, averemo $\frac{styy}{2txx + szz} = FT$, ſottotangente ricercata.

Egli è chiaro, che ſe il punto M, di cui ſi vuole la tangente, cadeſſe nel punto A, eſſendo in queſto caſo KH normale ad FA, ſarebbe $FN = FP = FM = FA = FK = FH$; e però $FT = \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}AF$.

63. Troveraſſi forſe più ſpeditamente la ſottotangente della Ciſſoide per mezzo della ſolita formola del num. 30.; poichè, condotte le NE, ML perpendicolari ad FB, e chiamando $FB = 2a$, $FL = x$, $LM = y$, per la proprietà della curva FMA ſarà $BE = FL = x$, e per la proprietà del circolo, ſarà $EN = \sqrt{2ax - xx}$, ed i triangoli ſimili FLM, FEN daranno FL, $LM :: FE$, EN, e però FL, $LM :: EN$, EB, cioè x, $y :: \sqrt{2ax - xx}$, x; quindi $y = \frac{xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, o ſia

sia $yy = \frac{x^3}{2a - x}$, equazione della curva FMA; differenziando adunque averemo $2ydy = \frac{6axxdx - 2x^3dx}{\overline{2a - x}^2}$, e presa la formola solita $\frac{ydx}{dy}$, e fatte tutte le sostituzioni, sarà $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy \times \overline{2a - x}^2}{3axx - x^3} = LO = \frac{2ax - xx}{3a - x}$, se si ponga in luogo di yy il valore $\frac{x^3}{2a - x}$.

64. Sieno due curve ANB, CPD, (*Fig.* 43.) ed una retta FK, ed in esse tre punti fissi A, C, F; sia in oltre la curva EMG tale, che, condotta per un qualunque punto M di essa la retta FMN dal dato punto F, e dal punto M la retta MP parallela ad FK, la relazione dell'arco AN all'arco CP venga espressa da un'equazione qualunque. Si dimanda la tangente della curva EG nel punto M.

Sia MT la ricercata tangente, che incontri in T la retta FK prodotta, se fa bisogno, e dal punto T si tiri TH parallela ad FM, e per lo punto M si conducano MRK parallela alla tangente in P, ed MOH parallela alla tangente in N, e sia $FmOn$ infinitamente prossima ad FN. Chiamate $FM = s$, $FN = t$, $MK = u$, e gli archi $AN = y$, $CP = x$, e però $Nn = dy$, $Pp = dx$, sarà per i triangoli simili FNn, FMO, FN, Nn :: FM, MO,

MO, cioè t, dy :: s, $MO = \frac{sdy}{t}$, e per i triangoli simili MmR, MTK; ed MOm, MHT, sarà MR, Mm :: MK, MT; ed Mm, MO :: MT, MH; dunque sarà anche MR, MO :: MK, MH, cioè dx, $\frac{sdy}{t}$ :: u, $MH = \frac{usdy}{tdx}$. Quindi differenziando l'equazione data, averemo il valore di dy dato per dx, e fatta la sostituzione, sarà MH espressa in termini finiti. Presa adunque MH eguale al ritrovato valore, e parallela alla tangente in N della curva ANB, e condotta HT parallela ad MF, se dal punto M si tirerà al punto T la retta TM, sarà essa tangente nel punto M della curva EMG.

ESEMPIO.

65. La curva ANB (*Fig.* 44.) sia un quarto di circolo, il di cui centro F, e CPD della *Fig.* 43. sia il raggio APF della *Fig.* 44. perpendicolare alla retta $FKTB$, e si conduca la tangente AR. S'intenda aggirarsi equabilmente il raggio FA intorno al centro F, e nello stesso tempo muoversi equabilmente la tangente AR sempre parallela a se stessa verso FB in modo, che quando il raggio FA cade in FB, cada pure in FB la tangente AR. Con questo moto il punto M, che è la intersecazione del raggio, e della tangente, descriverà la curva AMG, che chiamasi la *Quadratrice di Dinostrate*. Dalla

Dalla generazione di questa curva è chiaro, che sarà l'arco AN all'intercetta AP, come il quadrante AB al raggio AF; chiamando adunque $AN = y$, $AP = x$, $AB = a$, $AF = r$, sarà $ry = ax$, e $dy = \frac{adx}{r}$, dunque sostituendo questo valore di dy nella formola $\frac{usdy}{tdx}$, sarà $MH = \frac{asu}{rt}$; ma in questo caso FN è il raggio del circolo, ed $MK = AF - AP$, dunque $t = r$, $u = r - x$, quindi $MH = \frac{asr - asx}{rr} = \frac{as - sy}{r}$, posto in luogo di ax il valore ry dato dall'equaaione. Dal punto M si alzi MH normale ad FM, ed eguale all'arco MQ descritto col centro F, raggio FM, e si tiri HT parallela ad FM, sarà MT tangente della quadratrice nel punto M; imperocchè, per i settori simili FNB, FMQ, sarà FN, $NB :: FM, MQ$, cioè $r, a - y :: s$, $MQ = \frac{as - sy}{r} = MH$.

66. Sieno due curve BN, FQ, (*Fig.* 45.) delle quali si sappiano condurre le tangenti, e che abbiano per asse comune la retta BA, in cui sieno due punti fissi A, E, e sia un'altra curva LM tale, che condotta per un qualunque punto M di essa la retta AMN; e descritto col centro A, raggio AM, l'arco MG; e dal punto G abbassata GQ normale ad AG, sia data la re-

 lazione

lazione de' ſpazj ANB, $EFQG$, e delle linee AM, AN, QG per mezzo di un' equazione qualunque. Si ricerca la tangente della curva LM nel punto M.

Condotta la retta ATH perpendicolare ad AMN, ſia un'altra Amn infinitamente proſſima ad AMN, e l'arco (mg), e la perpendicolare (gq), quindi col centro A deſcritto l'archetto NS, ſi chiamino le ſottotangenti date $HA = a$, $GK = b$, e ſia $AM = y$, $AN = z$, $GQ = u$, e gli ſpazj $EGQF = s$, $ANB = t$, ſarà $Rm = Gg = dy$, $Sn = dz$, ed a cagione de' triangoli ſimili KGQ, Qoq, ſarà (oq) $= -du = \frac{udy}{b}$, e per i triangoli ſimili HAN, NSn, ſarà $SN = \frac{adz}{z}$. Lo ſpazio $GQqg$ ſi può prendere per lo ſpazio $GQog$, perchè la differenza loro Qoq è quantità infiniteſima del ſecondo ordine, onde ſarà $GQqg = udy = -ds$; così pure ſarà $ANn = \frac{1}{2} AN \times NS = \frac{1}{2} adz = -dt$. Soſtituiti per tanto nella differenza dell'equazione propoſta, in luogo di du, ds, dt, queſti valori, averemo un' equazione, da cui ſi caverà il valore di dz dato per dy. Ora per i ſettori ſimili ARM, ANS, ſarà $MR = \frac{aydz}{zz}$, e per i triangoli ſimili mRM, MAT, ſarà $AT = \frac{ayydz}{zzdy}$, formola della ſottotangente, in cui ſe ſi ſoſtituirà, in luogo di dz, il valore dato per dy dall' equazione della

curva,

curva, spariranno le differenze, e la sottotangente sarà data in termini finiti.

ESEMPIO.

67. Lo spazio $EGQF$ sia doppio di ABN, cioè $s = 2t$, sarà $ds = 2dt$, ma $ds = -udy$, e $dt = -\frac{1}{2}adz$, dunque sarà $udy = adz$, e $dz = \frac{udy}{a}$, dunque la sottotangente $AT = \frac{uyy}{zz}$.

La curva BN sia un circolo del centro A, raggio $AN = c$, quindi $z = c$, e la curva FQ sia un' iperbola dell' equazione $uy = ff$, sarà la sottotangente $AT = \frac{ffy}{cc}$, cioè la ragione di AM ad AT costante. La curva LM (*Fig.* 46.) chiamasi in questo caso la *Logaritmica spirale*.

E' chiaro, che la curva LM farà infiniti giri prima di giungere nel punto A; imperocchè quando il punto G (*Fig.* 45.) arriva in A, lo spazio s sarà infinito, come vedrassi nel calcolo integrale, dunque dovrà essere infinito anche lo spazio t, che non può esserlo, se non dopo infiniti giri del raggio AM.

68. Rimane per ultimo da considerarsi un caso particolare delle tangenti. Si è veduto, che essendo le coordinate di una curva qualunque x, ed y, la formola generale della sottotangente è $\frac{ydx}{dy}$, o $\frac{xdy}{dx}$, secon-

do

do che la y, o la x fa figura di ordinata; e però, differenziata l'equazione della curva, se da essa si ricavi il valore della dx, o della dy, questo valore surrogato nella formola generale ci somministra una frazione in termini tutti finiti, la quale è l'espressione, o valore della sottotangente per un qualunque punto della proposta curva. Che se si vuole la sottotangente per un determinato punto della curva, niente altro si deve fare, che sostituire nella frazione in luogo delle x, ed y i valori, che esse ânno nel dato punto. Ma accade alcuna volta, che sostituendo in luogo di x, o di y un determinato valore nella frazione, che esprime la sottotangente, o sia nel rapporto della dx alla dy cavato dall'equazione differenziata della curva, tutti i termini nel numeratore, e denominatore di esso svaniscano, e così ne provenga $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$, e però anco la sottotangente $= \frac{0}{0}$, dal che però non si deve inferire, che essa sia nulla in quel punto.

Sia per un esempio la curva

$y^4 - 8ay^3 - 12axyy + 16aayy + 48aaxy + 4aaxx - 64a^3x = 0$, e sia y l'assissa, x l'ordinata, e però $\frac{xdy}{dx}$ la formola della sottotangente. Differenziando adunque l'equazione, averemo $\frac{dy}{dx} = \frac{3ayy - 12aay - 2aax + 16a^3}{y^3 - 6ayy - 6axy + 8aay + 12aax}$, e la sottotan-

totangente $\frac{xdy}{dx} = \frac{3axyy - 12aaxy - 2aaxx + 16a^3x}{y^3 - 6ayy - 6axy + 8aay + 12aax}$; ma se si vuole la sottotangente di quel punto di curva, a cui corrisponde l'assissa $y=2a$, essendo in questo caso, per la data equazione, anche $x=2a$, fatte le sostituzioni nella frazione, che esprime il rapporto della dx alla dy, si trova egli essere $\frac{12a^3 - 24a^3 - 4a^3 + 16a^3}{8a^3 - 24a^3 - 24a^3 + 16a^3 + 24a^3}$, cioè $\frac{0}{0}$, perchè tutti i termini si distruggono, e però anco la sottotangente in quel punto $= \frac{0}{0}$, il che nulla ci fa sapere, quantunque allo stesso punto corrisponda benissimo la sottotangente, anzi due.

69. Accaderà infallibilmente questo caso ogni qual volta la curva abbia più rami, che s'incontrino, e si voglia la tangente nel punto del concorso; ed in fatti la curva *NOPQR* (*Fig.* 47.) dell'equazione proposta â i due rami *OP*, *MQ*, che si tagliano nel punto *G*, a cui appunto corrisponde $y=2a$, essendo *OT* l'asse delle y, ed il principio in *O*, ed $x=2a$, prese le x nell' asse *OQ*.

Per rendere ragione di questo caso, basta avvertire due cose: la prima, che nel punto del concorso di diversi rami di curva diverse radici dell'equazione si fanno eguali tra loro; così rispetto alla proposta equazione

ne nel punto G sono eguali i due valori della x, e due pure sono eguali de' quattro valori della y; la seconda, (come si è dimostrato nell'Algebra Cartesiana) che se un' equazione, la quale contenga delle radici eguali, si moltiplicherà termine per termine con una serie aritmetica qualunque, il prodotto sarà eguale al zero, e conterrà in se una meno delle radici eguali; se questo prodotto si moltiplicherà pure per una serie aritmetica, il nuovo prodotto sarà istessamente eguale al zero, e conterrà una meno delle radici eguali, che contiene il primo prodotto, cioè due radici meno delle eguali, che contiene la prima equazione, e così successivamente fino a quel prodotto, che una sola contenga delle radici eguali.

Se adunque un'equazione qualunque di curva, trattando x per variabile, ed y per costante, si moltiplicherà per una serie aritmetica, la quale termini nel zero; nel caso di radici eguali il prodotto sarà eguale al zero, e lo sarà ancora, se si divida esso prodotto per x, la qual divisione succede dal moltiplicarsi per zero l'ultimo termine. Lo stesso sarà, trattando y per variabile, ed x per costante, e moltiplicando l'equazione per tale serie aritmetica, che ponga il zero sotto l'ultimo termine.

Ciò posto, è facile a vedersi, che questa tale operazione si fa appunto differenziando, cioè si tratta la x, come

come variabile, e si moltiplica l'equazione per una serie aritmetica, il di cui primo termine è il massimo esponente della x, e l'ultimo è il zero, e nasce un prodotto moltiplicato in dx; indi si tratta y per variabile, e si moltiplica l'equazione per una serie aritmetica, il di cui primo termine è il massimo esponente della y, e l'ultimo è il zero, e nasce un prodotto moltiplicato in dy; ma nel caso di radici eguali di x, e di radici eguali di y, tanto il prodotto, che moltiplica dx, quanto quello, che moltiplica dy, sono zero; dunque appunto deve nascere la ragione di $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$ in quel punto, nel quale due rami di curva s'incontrano.

Per vedere ciò chiaramente, ordino l'equazione della proposta curva per la lettera y, e la moltiplico per la serie aritmetica, il di cui ultimo termine sia zero.

$$\begin{array}{lllll} y^4 - 8ay^3 & - 12axyy & + 48aaxy & + 4aaxx & \\ & + 16aayy & & - 64a^3x & = 0, \\ 4, \quad 3, & \quad 2, & \quad 1, & \quad 0. & \end{array}$$

il prodotto sarà

$$4y^4 - 24ay^3 - 24axyy + 32aayy + 48aaxy = 0,$$

cioè dividendo per $4y$

$$y^3 - 6ayy - 6axy + 8aay + 12aax = 0.$$

Ordino la stessa equazione per la lettera x, e la moltiplico per la serie aritmetica, il di cui ultimo termine

sia zero

$$\begin{array}{l} 4aaxx + 48aaxy + y^4 \\ \quad - 64a^3x - 8ay^3 \quad = 0, \\ \quad - 12ayyx + 16aayy \\ \quad 2, \qquad 1, \qquad 0 \end{array}$$

il prodotto sarà

$$8aaxx + 48aaxy - 64a^3x - 12ayyx = 0,$$

cioè dividendo per $4x$

$$2aax + 12aay - 16a^3 - 3ayy = 0.$$

Ciò fatto, differenzio l'equazione proposta, ed il differenziale si è $4y^3dy - 24ayydy - 24axydy - 12ayydx + 32aaydy + 48aaxdy + 48aaydx + 8aaxdx - 64a^3dx = 0$, cioè dividendo per 4, e trasponendo i termini della dx

$$\overline{y^3 - 6ayy - 6axy + 8aay + 12aax} \times dy =$$

$$\overline{3ayy - 12aay - 2aax + 16a^3} \times dx,$$

Ma il moltiplicatore della dy è il primo prodotto nella serie aritmetica, ed in conseguenza $= 0$ relativamente al punto G, in cui y â due valori eguali; ed il moltiplicatore della dx è il secondo prodotto nella sua serie aritmetica, mutati i segni, il che però non fa, che non sia $= 0$ relativamente allo stesso punto G, in cui x â due valori eguali, dunque sarà $dy \times 0 = dx \times 0$, cioè $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ nel punto G.

Ma se il moltiplicare qualunque equazione per una serie aritmetica, o sia il differenziarla (giacchè è lo stesso) fa,

fa, che nel ſuppoſto di radici eguali naſca il caſo, di cui ſi tratta, cioè $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, fa ancora, che nell' equazione indi nata vi ſia una meno delle radici eguali, e però ſe l'equazione propoſta â due radici eguali, la differenziata ne avrà una ſola di eſſe eguali; ſe la propoſta ne averà tre, differenziando di nuovo la già differenziata, (aſſumendo per coſtanti le fluſſioni dx, dy) quella, che indi naſce, ne averà una ſola, e così di mano in mano diſcorrendo. Si aſſumono poi per coſtanti le fluſſioni dx, dy, perchè diſtruggendoſi vicendevolmente tanto i termini moltiplicati in dx, quanto quelli moltiplicati in dy, nella ſuppoſizione di quel tale determinato valore della x, e della y, ſi diſtruggeranno nulla meno sì i termini moltiplicati in ddx, come quelli moltiplicati in ddy. In queſto modo operando ſi ridurranno le equazioni a non contenere, che una ſola di quelle molte radici eguali, che prima avevano; e però differenziando finalmente l'ultima, per ritrarne la ragione di dy alla dx, non potrà più naſcere il caſo di $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$.

Ripiglio adunque l'equazione di prima

$y^4 - 8ay^3 - 12axyy + 16aayy + 48aaxy + 4aaxx - 64a^3x = 0$,

differenziata ſi trova eſſere

$y^3dy - 6ayydy - 6axydy - 3ayydx + 8aaydy + 12aaxdy + 12aaydx + 2aaxdx - 16a^3dx = 0$.

Ma poichè sostituendo in luogo di y il valore $2a$, ed il corrispondente in luogo di x, che è pure $2a$, a fine di avere la tangente del punto G, ritrovo $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, passo a differenziare la già differenziata, prendendo sempre per costanti le flussioni dx, dy, e ricavo $3yydy^2 - 12aydy^2 - 6axdy^2 + 8aady^2 - 12aydydx + 24aadxdy + 2aadx^2 = 0$.

Sostituisco in luogo di y, e di x il valore $2a$ relativamente al punto G, e trovo $dx = \pm dy \sqrt{8}$, indi nella formola generale della sottotangente $\frac{xdy}{dx}$ posti i valori di $x = 2a$, e di $dx = \pm dy \sqrt{8}$, sarà finalmente $\pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ la sottotangente, o per meglio dire, le due sottotangenti, che corrispondono al punto G, una positiva, l'altra negativa, ed eguale alla positiva.

Se la curva averà tre radici eguali nel punto, di cui si vuole la tangente, cioè se la curva averà tre rami, che in quel punto s'incontrino; poichè dopo averla la prima volta differenziata averà ancora due radici eguali, differenziata di nuovo, a fine di avere la ragione di dy alla dx, ci darà ciò non ostante, per quanto è stato detto, $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, e però sarà necessaria una terza differenziazione; generalmente tante volte

dovrà

dovrà differenziarsi l'equazione, quante sono le radici eguali, o sia i rami della curva, e dall'ultima differenza ricaverassi la ragione della dy alla dx, e tante saranno le tangenti, quanti sono i rami della curva stessa, i quali in quel punto si tagliano.

Sia la curva $QADHAhdAI$ (*Fig.* 48.) dell'equazione $x^4 - ayxx + by^3 = 0$, la quale â i tre rami QAD, IAd, hAH, che si tagliano in A; e sia AP l'asse delle x, ed AB normale ad AP l'asse delle y, ed A la comune loro origine. Differenziando l'equazione, sarà $4x^3dx - 2ayxdx - axxdy + 3byydy = 0$, cioè $\frac{dx}{dy} = \frac{axx - 3byy}{4x^3 - 2ayx}$. Ma se si voglia la tangente del punto A, poichè in esso è $x = 0$, $y = 0$, sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Si passi adunque alla seconda differenziazione, e sarà $12xxdx^2 - 2aydx^2 - 4axdxdy + 6bydy^2 = 0$, ma di quà pure si ricava $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$, essendo ogni termine moltiplicato per $x = 0$, secondo la supposizione, ovvero per $y = 0$.

Differenziando finalmente per la terza volta, sarà $24xdx^3 - 6adydx^2 + 6bdy^3 = 0$, ma posta $x = 0$, svanisce il primo termine, e però è $adx^2dy = bdy^3$; dal che si ricavano tre valori della dy, cioè $dy = 0$, e $dy = \pm \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, i quali ci danno tre rapporti della dx alla

dy,

dy, vale a dire tre tangenti per lo punto A; una infinita, che si confonde con l'asse AP, e serve per il ramo haH. L'altre, prendendo una qualunque AS, e tirando normalmente ST tale, che sia ST, $SA :: \sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, le TA saranno tangenti nel punto A, l'una del ramo QAD, l'altra del ramo IAd.

70. La verità di questo metodo si può dimostrare anco in altra maniera, e come suol dirsi *A posteriori*. I differenziali dell'equazioni finite, che con le accennate regole del differenziare si trovano, non sono essi realmente i differenziali compiuti, dandoci le regole i soli termini, che contengono i differenziali primi, cioè di una sola dimensione, ed ommettendo in figura di compendio, e di maggior comodo i differenziali di altro grado, cioè di maggior dimensione, i quali per i principj del calcolo, già renderebbero relativamente nulli i termini, ne' quali si trovano.

Richiamata l'equazione

$$\begin{matrix} y^4 - 8ay^3 - 12axyy + 48aaxy + 4aaxx \\ + 16aayy \qquad\qquad - 64a^3x \end{matrix} = 0,$$

e differenziata, sarà

$4y^3dy - 24ayydy - 12ayydx - 24axydy + 32aaydy + 48aaxdy + 48aaydx + 8aaxdx - 64a^3dx = 0$; ma se la y si consideri accresciuta della sua differenza, e così la x, e che nella proposta equazione in luogo della y, e

sue

fue poteſtà ſi ponga $y + dy$, e le corriſpondenti poteſtà, e lo ſteſſo ſi faccia ponendo $x + dx$, e le poteſtà corriſpondenti in luogo di x, e ſue poteſtà, averaſſi $y^4 + 4y^3dy + 6yydy^2 + 4ydy^3 + dy^4 - 8ay^3 - 24ayydy - 24aydy^2 - 8ady^3 - 12axyy - 24axydy - 12axdy^2 - 12ayydx - 24aydxdy - 12adxdy^2 + 16aayy + 32aaydy + 16aady^2 + 48aaxy + 48aaydx + 48aaxdy + 48aadxdy + 4aaxx + 8aaxdx + 4aadx^2 - 64a^3x - 64a^3dx = 0$, ed ordinando i termini in colonne ſecondo le dimenſioni de' differenziali

I.	II.	III.	IV.	V.
$+ y^4$	$+ 4y^3dy$	$+ 6yydy^2$	$+ 4ydy^3$	$+ dy^4$
$- 8ay^3$	$- 24ayydy$	$- 24aydy^2$	$- 8ady^3$	
$- 12axyy$	$- 24axydy$	$- 12axdy^2$	$- 12adxdy^2$	
$+ 16aayy$	$- 12ayydx$	$- 24aydxdy$		$= 0.$
$+ 48aaxy$	$+ 32aaydy$	$+ 16aady^2$		
$+ 4aaxx$	$+ 48aaydx$	$+ 48aadxdy$		
$- 64a^3x$	$+ 48aaxdy$	$+ 4aadx^2$		
	$+ 8aaxdx$			
	$- 64a^3dx$			

La ſomma per tanto di tutte queſte colonne, toltone la prima, che è l'equazione ſteſſa propoſta, ſarà il compiuto, ed intero differenziale di lei. Ma perchè l'ultimo termine, cioè la colonna quinta è infinitamente piccola riſpetto alla quarta, e la quarta riſpetto alla

terza,

terza, e la terza rispetto alla seconda, si assume la sola seconda colonna per il differenziale della proposta equazione; il quale compendio ci vien dato dalla solita regola del differenziare; ma non è già, che le colonne dopo la seconda sieno assolutamente nulle. Se adunque nascerà il caso, che la seconda colonna sia assolutamente nulla, non sarà più nulla rispetto a lei la terza, e però non dovrà trascurarsi, anzi sarà essa il differenziale della prima. Istessamente si discorra della quarta, quando sia zero la seconda, e la terza, e così dell'altre. Ora questo caso appunto succede, quando si cerca la relazione di dx alla dy nella proposta equazione in quel punto, in cui sia $y = 2a$, ed $x = 2a$; poichè, fatte queste sostituzioni, si trova essa seconda colonna esser zero, e però si passa a far uso della terza, il che è affatto la stessa cosa, che differenziare due volte l'equazione, come è manifesto.

71. Per gli stessi principj, e nella stessa maniera si scioglie un simil caso, che nasce talora nella costruzione delle curve, se l'ordinata venga espressa da una frazione, il di cui denominatore, e numeratore divengano eguali al zero, quando si fissi per l'assissa un determinato valore.

A fine d'uscir d'imbarazzo basta considerare la frazione, come se esprimesse le ordinate di due curve, che in qualche punto del loro comune asse concorrano,

e perchè in quel punto la ragione loro non può in altro modo eſſer eſpreſſa, che per $\frac{0}{0}$, biſogna cercare, quale ſia il loro rapporto nel punto infinitamente proſſimo, cioè quando eſſe ſieno creſciute d'un' infiniteſimo, vale a dire, paſſare alla differenziazione del numeratore, poi del denominatore della frazione ſteſſa, e ciò una, due, o più volte ſin tanto, che finalmente, poſto il valore determinato dell'aſſiſſa nella frazione, eſſa non ſia più $\frac{0}{0}$, e ciò per quella ſteſſa ragione detta di ſopra intorno alle colonne de' differenziali.

Sia l'equazione $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$. Preſa $x = a$, e fatta la ſoſtituzione, ſarà $y = \frac{0}{0}$, dal che non ſi può perciò inferire, che all' aſſiſſa $x = a$ corriſponda l'ordinata $y = 0$. Differenziando adunque il numeratore, indi il denominatore della frazione, ſarà

$$y = \frac{a^3dx - 2x^3dx \times \overline{2a^3x - x^4}^{\,-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}a^3dx \times a^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{3}{4}axxdx \times a^{-\frac{3}{4}}x^{-\frac{9}{4}}},$$

cioè dividendo ſopra, e ſotto per dx, e ponendo $x = a$, ſarà $y = \frac{16a}{9}$.

Sia l'equazione $y = \frac{a\sqrt[3]{4a^3 + 4x^3} - ax - aa}{\sqrt{2aa + 2xx} - x - a}$, se si faccia $x = a$, sarà $y = \frac{o}{o}$.

Differenziando per tanto il numeratore, poi il denominatore della frazione, sarà $y = \frac{4axx \times \overline{4a^3 + 4x^3}^{-\frac{2}{3}} - a}{2x \times \overline{2aa - 2xx}^{-\frac{1}{2}} - 1}$ ommettendo la dx, che è tanto nel numeratore, quanto nel denominatore; ma se in questa frazione pure si ponga $x = a$, sarà ancora $y = \frac{o}{o}$, dunque passando a differenziare questa seconda frazione, avremo $y = \frac{32a^4x \times \overline{4a^3 + 4x^3}^{-\frac{5}{3}}}{4aa \times \overline{2aa + 2xx}^{-\frac{3}{2}}}$, ommettendo la dx, e posta $x = a$, sarà $y = 2a$.

CAPO

CAPO III.

Del Metodo de' Massimi, e Minimi.

72. Se in una curva qualunque, le di cui ordinate sieno parallele, crescendo le assisse BC (*Fig.* 49. 50. 51., *e* 52.) continovamente, cresca altresì l'ordinata CG sino ad un certo punto E dopo di cui vada calando, o non vi sia più ordinata di sorta alcuna; o pure al contrario crescendo l'assissa, l'ordinata CG vada continovamente calando sino ad un certo punto E, dopo di cui, o cresca, o più non vi sia; l'ordinata EF si chiama la *Massima*, o la *Minima*.

Alla curva GHF sia EF la massima delle ordinate (*Fig.* 49.), o la minima (*Fig.* 50.); presa una qualunque assissa BC, e condotta l'ordinata CG, al punto G s'intenda essere tangente GA, e DH infinitamente prossima a CG; chiamata $BC = x$, $CG = y$, e fatta GI parallela a BC, sarà $GI = CD = dx$, $IH = dy$. Poichè sono simili i triangoli ACG, GHI nella *Fig.* 49., sarà $AC, CG :: GI, IH$; e poichè sono simili i triangoli ATG, GHI nella *Fig.* 50., sarà $AT, TG :: GI, IH$. Ciò posto, si finga che l'ordinata GC s'accosti sempre parallela a se stessa alla massima, o mi-

nima ordinata EF; egli è chiaro, che accostandosi CG ad EF, la sottotangente AC, o AT si farà sempre maggiore per modo, che quando CG cada sopra la EF, la tangente si farà parallela a BC, e per conseguenza la sottotangente sarà infinita. In questo caso adunque avrà AC a CG, o AT a TG ragione infinita, rimanendo CG quantità finita; ma poichè è sempre AC, CG, o $AT, TG :: GI, IH$, averà anco GI ad IH ragione infinita, e però sarà dy nulla rispetto alla dx, cioè $dy = 0$ nel punto della massima, o minima ordinata.

Sia la curva GHF, (*Fig.* 51., *e* 52.) EF la minima delle ordinate (*Fig.* 51.), o la massima (*Fig.* 52.); presa pure una qualunque assissa BC, e condotta l'ordinata CG, la tangente GA, DH infinitamente prossima a CG, e GI parallela a BC, e chiamate $BC = x$, $CG = y$, sarà $GI = CD = dx$, $IH = dy$. Per i triangoli simili ACG, GIH, sarà (*Fig.* 51.) $AC, CG :: GI, IH$; e per i triangoli simili ATG, GIH, (*Fig.* 52.) sarà $AT, TG :: GI, IH$. Accostandosi adunque l'ordinata CG sempre parallela a se stessa alla massima, o minima ordinata, la sottotangente AC, o AT si farà sempre minore per modo, che quando CG cada sopra la EF, la tangente si farà normale a BC, e per conseguenza nulla la sottotangente. In questo caso adunque averà AC a CG, o AT a TG la ragione del nulla

alla

alla quantità finita, e però essendo nella stessa ragione GI ad IH, sarà dx nulla rispetto alla dy, cioè $dy=\infty$ nel punto della massima, o minima ordinata. Adunque la formola generale per le massime, e minime ordinate sarà $dy=0$, o pure $dy=\infty$.

73. Data adunque l'equazione della curva, di cui si cerca la massima, o la minima ordinata, si dovrà differenziare, per ritrarne il valore della frazione, o rapporto $\frac{dy}{dx}$, indi fatta la supposizione di $dy=0$, o pure di $dx=0$, cioè di $dy=\infty$, si averà il valore dell'assissa x, a cui compete la massima o minima y, e questo valore sostituito nell'equazione proposta ci darà la massima, o minima ordinata, che si cerca; solo avvertendo, che nel caso della supposizione di $dy=\infty$, cioè di $dx=0$, la x farà figura di ordinata, se nell' altra supposizione la faceva la y. Che se nè la prima supposizione di $dy=0$, nè la seconda di $dy=\infty$ ci fornirà valore alcuno reale della y, si dovrà concludere, che la proposta curva non â nè massimi, nè minimi.

74. Serve questo metodo per avere una compiuta, ed esatta idea delle curve; per ricavare, in quali punti le tangenti sieno parallele agl'assi conjugati ec. Ma oltre ciò si applica ad infinite questioni, che in tale proposito possono farsi sì geometriche, come fisiche; tale sarebbe il ricercare fra gl'infiniti parallelepipedi di una

data

data solidità, quale sia quello, che abbia la minima superficie; siccome il ricercare tra le infinite vie, che può tenere un mobile, per giugnere da un punto all'altro non posto nella medesima verticale, quale sia quella, che sarà trascorsa nel minimo tempo con una data legge di moto, ed altre simili. In tali questioni ritrovata l'espressione analitica di ciò, che si vuole essere un massimo, o un minimo, si ponga eguale ad y, e fatta la differenziazione, si proceda avanti con le date regole.

ESEMPIO I.

75. Sia la curva dell' equazione $2ax - xx = yy$, e si voglia sapere, a quale punto dell' asse dell' assisse x corrisponda la massima ordinata y, e cosa ella sia.

Differenziata l'equazione, sarà $2adx - 2xdx = 2ydy$, cioè $\frac{dy}{dx} = \frac{a - x}{y}$. Facendo la supposizione di $dy = 0$, dovrà essere zero il numeratore della frazione, e però sarà $a - x = 0$, onde $x = a$; adunque la massima ordinata corrisponde a quell'assissa, che sia eguale ad a; sostituito questo valore in luogo di x nella proposta equazione, sarà $2aa - aa = yy$, cioè $y = \pm a$; la massima ordinata adunque positiva, e negativa è eguale ad a. Facendo la supposizione di $dy = \infty$, dovrà essere zero il denominatore della frazione, e però sarà $y = 0$,

sosti-

sostituito per tanto questo valore in luogo di y nella proposta equazione, averemo $x = 0$, ed $x = 2a$; vale a dire, che $x = 0$ sarà la minima, ed $x = 2a$ la massima; o più propriamente, che quando sia $x = 0$, ed $x = 2a$, essendo infinita la dy rispetto alla dx, la sottotangente sarà nulla, cioè la tangente parallela alle ordinate y.

ESEMPIO II.

76. Sia la curva dell' equazione $xx - ax = yy$. Differenziando sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - a}{2y}$. La supposizione di $dy = 0$ ci dà $x = \frac{a}{2}$, ma sostituito questo valore in luogo di x nella proposta equazione, la y si trova immaginaria, dunqne la curva non â ordinata, che a tale assissa corrisponda, e però molto meno averà massima o minima. La supposizione di $dy = \infty$, cioè di $dx = 0$ ci dà $y = 0$, vale a dire, che la tangente sarà perpendicolare all'asse dell'assisse x nel punto, in cui è $y = 0$, il quale corrisponde alle due assisse $x = 0$, ed $x = a$, poichè sostituito in luogo di y il zero nella proposta equazione, sarà $xx - ax = 0$, e però $x = 0$, ed $x = a$.

ESEM-

ESEMPIO III.

77. Sia la curva dell' equazione $2axy = a^3 + axx - bxx$, in cui le x sono le assisse, y le ordinate. Differenziando sarà $2axdy + 2aydx = 2axdx - 2bxdx$, e però $\frac{dy}{dx} = \frac{ax - bx - ay}{ax}$. La supposizione di $dy = 0$ ci dà $x = \frac{ay}{a-b}$, e sostituito questo valore nell' equazione proposta, sarà $\frac{2aayy}{a-b} = a^3 + \frac{a^3yy - aabyy}{\overline{a-b}^2}$, cioè $yy = a \times \overline{a-b}$, ed $y = \pm \sqrt{aa - ab}$, massima, o minima ordinata. E poichè abbiamo $x = \frac{ay}{a-b}$, fatta la sostituzione del valore della y, sarà $x = \pm \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a-b}}$, assissa, a cui corrisponde la ritrovata massima, o minima ordinata. La supposizione di $dy = \infty$, o sia di $dx = 0$ ci dà $ax = 0$, cioè $x = 0$, e fatta la sostituzione nella proposta equazione, sarà $a^3 = 0$, ma implica, che una quantità data finita sia zero, adunque la curva non averà altri massimi, o minimi dai ritrovati nella prima supposizione, i quali per l'ambiguità de' segni sono due, ed eguali; uno positivo, che corrisponde alla assissa positiva, l'altro negativo, che corrisponde alla assissa negativa.

78.

78. Ci dà il metodo confusamente i massimi, e minimi; nè in forza di esso si possono distinguere gl'uni dagl'altri, si riconoscono però quando sia noto l'andamento della curva; ma senza tale notizia si può procedere così. Si assegni all'assissa nell'equazione data un valore per poco maggiore, o minore di quello, che corrisponde alla massima, o minima ordinata, di cui si tratta, ed il valore dell'ordinata, che indi nasce, scioglierà il quesito; poichè se sarà maggiore di quello somministratoci dal metodo, la questione sarà de' minimi; ed all'opposto essendo, sarà de' massimi. La curva adunque di quest'esempio avrà due minimi.

ESEMPIO IV.

79. Sia la curva *MADEAN* (*Fig.* 53.) dell'equazione $x^3+y^3=axy$, $AB=x$, $BE=y$. Differenziando si averà $\frac{dv}{dx}=\frac{ay-3xx}{3yy-ax}$, e però facendo la supposizione di $dy=0$, sarà $y=\frac{3xx}{a}$, e fatta la sostituzione di questo valore nella data equazione, si trova $x=\frac{a}{3}\sqrt[3]{2}$, quindi poichè $y=\frac{3xx}{a}$, sarà $y=\frac{a}{3}\sqrt[3]{4}=BE$ la massima ordinata nella curva, la quale corrisponde all'assis-

ſa $x = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2} = AB$. La ſuppoſizione di $dx = 0$ ci darà $x = \frac{3yy}{a}$, e fatta la ſoſtituzione nell'equazione data, ſarà $y = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2}$, quindi $x = \frac{a}{3} \sqrt[3]{4}$ la maſſima AC; cui corriſponde $y = CD = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2}$, che è tangente nel punto D.

80. Ma prima di paſſare più avanti con gl'eſempj, è neceſſario prevenire un caſo, che ſuole alcuna volta ſuccedere, ed è che tanto la ſuppoſizione di $dy = 0$, quanto quella di $dy = \infty$ ci forniſca un medeſimo valore dell'ordinata, o dell'aſſiſſa, ed in tale caſo non ſi determina alcun maſſimo o minimo, ma bensì un punto di interſecazione, o d'incontro di due rami della curva. E la ragione è evidente, imperciocchè eſſendo $\frac{dy}{dx}$ eguale ad una frazione, ſe dal numeratore ſi ricava lo ſteſſo valore della x, per eſempio, che ſi ricava dal denominatore, queſto valore, o radice ſoſtituita renderà nullo l'uno e l'altro, e però in quel tal punto di curva ſarà $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, ma ſi è veduto di ſopra al num. 69., che $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ indica ſempre incontro di due rami di curva, adunque ec.

ESEM-

ESEMPIO V.

81. Sia la curva GFM (*Fig.* 51.) la Parabola cubica dell'equazione $y-a=\sqrt[3]{a^3-2aax+axx}$, $BE=EF=a$, $BC=x$, $CG=y$. Differenziando sarà $\frac{dy}{dx}=\frac{2ax-2aa}{3\times\overline{a^3-2aax+axx}^{\frac{2}{3}}}$. La supposizione di $dy=0$ ci dà $x=a$; la supposizione di $dy=\infty$ ci dà parimenti $x=a$, adnnque la curva â un punto d'incontro F, che corrisponde all'assissa $x=a$, ed alla minima ordinata $y=a$, che si cava dalla proposta equazione, sostituito in luogo di x il suo valore.

Sia la stessa equazione, ma libera da' radicali, cioè $y^3-3ayy+3aay-a^3=a^3-2aax+axx$; differenziando sarà $\frac{dy}{dx}=\frac{2ax-2aa}{3yy-6ay+3aa}$. La supposizione di $dy=0$ ci dà $x=a$, e posto questo valore nella proposta equazione, si ricava $y=a$. La supposizione di $dy=\infty$ ci dà pure $y=a$, adunque $x=a$, ed $y=a$ ci danno il punto F, che è un punto d'incontro, o contatto de' due rami GF, FM, e nello stesso tempo la minima y.

Ma se opereremo sopra l'equazione $y-a=a^{\frac{1}{3}}\times\overline{a-x}^{\frac{2}{3}}$,

che esprime il solo ramo GF ($y-a=a^{\frac{1}{3}}\times\overline{x-a}^{\frac{2}{3}}$ esprimerebbe l'altro ramo FM) averemo $\frac{dy}{dx}=\frac{-2a^{\frac{1}{3}}}{3\times\overline{a-x}^{\frac{1}{3}}}$

La suppofizione di $dy=0$ nulla ci fa sapere; la suppofizione di $dy=\infty$ ci dà $x=a$, e però $y=a$, ed il punto F in questo caso ci fornisce un massimo rispetto alla x, ed un minimo rispetto alla y.

82. Dissi, che la suppofizione di $dy=0$, che ci dà $2a^{\frac{1}{3}}=0$ nulla ci fa sapere, intendendo rispetto ai massimi finiti, perchè comprendendo anco gl'infiniti, ella ce ne somministra due. Se $2a^{\frac{1}{3}}=0$, sarà dunque $a=0$, e sostituito questo valore nella proposta equazione, sarà essa $\frac{y}{0}=\sqrt[3]{xx}$, cioè $x=\pm\sqrt{\frac{y^3}{0}}$, e però x, ed y infinite. Due sono i massimi, servendo uno al ramo FG, l'altro al ramo FM, poichè posta $a=0$, l'equazione ambedue gli esprime.

Nascerà generalmente questo caso ogni qual volta la suppofizione di $dy=0$, o di $dy=\infty$ ci dia un'espressione finita costante, o un divisore costante eguale al zero, il qual valore sostituito nell'equazione proposta non porti o immaginario, o contradizione; e la ragione

ne si è, che una quantità finita non può essere presa per zero, se non rispetto a quantità infinita.

ESEMPIO VI.

83. Sia la curva (*Fig.* 54.) dell' equazione $x^4 - 2ax^3 + aaxx = y^4$, $AB = a$; AC, o $AP = x$; CM, o $PM = y$; differenziando sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 6axx + 2aax}{4y^3}$.

La supposizione di $dy = 0$ ci dà tre valori di x, cioè $x = 0$, $x = a$, $x = \frac{1}{2}a$; il valore $x = 0$ sostituito nella proposta equazione rende $y = 0$, il valore $x = a$ rende $y = 0$, il valore $x = \frac{1}{2}a$ rende $y = \pm \frac{a}{2}$. La supposizione di $dy = \infty$ ci dà $y = 0$, adunque la y â il medesimo valore nell'una, e nell'altra supposizione, quando sia $x = 0$, ed $x = a$, quindi i punti A, B saranno punti d'incontro de' rami della curva, ed $x = \frac{1}{2}a = AC$ darà la massima ordinata $y = \pm \frac{1}{2}a = CM$, o Cm. Il luogo del sopra posto esempio può chiamarsi luogo doppio, il quale nasce dall'essere alzata al quadrato l'una, o l'altra delle due semplici formole $ax - xx = yy$, al circolo, o pure $xx - ax = yy$, all' iperbola. Quindi non sarebbe bastato il ridurre l'equazione al semplice circolo, o alla semplice iperbola, ma era necessario aver mira alla complicazione delle dette curve fra loro.

ESEM-

ESEMPIO VII.

84. Sia la curva della *Fig.* 55., la di cui equazione $yy = \frac{aax - 2axx + x^3}{2a - x}$, $AP = x$, $PM = y$, $AD = 2a$. Differenziando sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{a^3 - 4aax + 4axx - x^3}{y \times \overline{2a - x}^2}$, cioè $\frac{dy}{dx} = \frac{a^3 - 4aax + 4axx - x^3}{\overline{a - x}\sqrt{x} \times \overline{2a - x}^{\frac{3}{2}}}$. Prima di andare più avanti osservo, che tanto il numeratore della frazione, quanto il denominatore è divisibile per $a - x$; adunque, e nella supposizione di $\frac{dy}{dx} = 0$, e in quella di $\frac{dy}{dx} = \infty$ si averà $a - x = 0$, cioè $x = a$, che sostituito ci dà $y = 0$, e però la curva avrà un nodo nell' asse al punto B, fatta $AB = a$. Fatta per tanto la divisione, sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{aa - 3ax + xx}{\overline{2a - x}\sqrt{\overline{2ax - xx}}}$. La supposizione di $\frac{dy}{dx} = 0$ ci dà $x = \frac{3a \pm a\sqrt{5}}{2}$; il valore $x = \frac{3a + a\sqrt{5}}{2}$ non serve, perchè sostituito nell'equazione proposta rende immaginaria la ordinata, la quale è generalmente immaginaria, qualora si assuma x maggiore di $2a$, come manifestamente si vede. Sostituito perciò l'altro

valore

valore $x = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$, ci dà $y = \pm a \sqrt{\frac{7a - 3a\sqrt{5}}{a + a\sqrt{5}}}$.

Fatta adunque $AP = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$, faranno PM, PM le maſſime ordinate, poſitiva l'una, e negativa l'altra, ed $= \pm a \sqrt{\frac{7a - 3a\sqrt{5}}{a + a\sqrt{5}}}$.

La ſuppoſizione di $dy = \infty$ ci dà $x = 0$, ed $x = 2a$; ſoſtituiti queſti valori nell'equazione propoſta, ſi averà $y = 0$, ed $y = \infty$; vale a dire, che preſa $x = 0$, cioè nel punto A, la tangente ſarà parallela alle ordinate PM, e preſa $x = 2a = AD$, la ordinata ſarà infinita, cioè aſintoto della curva riſpetto ai rami BH, BI.

ESEMPIO VIII.

85. Sia la Concoide dell'equazione $yy = \frac{aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 - bbxx + aabb}{xx}$. Differenziando ſarà $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^4 - bx^3 - aabx - aabb}{\pm xx\sqrt{aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 - bbxx + aabb}}$.

Nel primo Libro al num. 239. ſono ſtati da me conſiderati tre caſi di queſta curva; il primo quando ſia $a = b$; il ſecondo quando ſia b minore di a; ed il terzo quando b ſia maggiore di a.

Riſpetto al primo caſo: la curva ſarà quella della *Fig.*

Fig. 56., e l'equazione $yy = \frac{a^4 + 2a^3x - 2ax^3 - x^4}{xx}$, presa $GA = GP = a$, $GE = x$, $EM = y$; e differenziando, $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^4 - ax^3 - a^3x - a^4}{\pm xx\sqrt{a^4 + 2a^3x - 2ax^3 - x^4}}$. La supposizione di $dy = 0$ ci dà il numeratore eguale al zero, cioè $\overline{x+a} \times \overline{x^3 + a^3} = 0$; e però $x = -a$, il qual valore, sostituito nell'equazione della curva, ci dà $y = 0$. La supposizione di $dy = \infty$ ci dà il denominatore eguale al zero, cioè $xx\sqrt{\overline{x+a}^2 \times \overline{aa - xx}} = 0$, e però $x = 0$, $x = -a$, ed $x = a$; ma il valore $x = -a$ si è trovato anche nella supposizione di $dy = 0$, adunque quando sia $x = -a$, cioè presa $GP = a$, la curva averà nel punto P un' incontro di due rami.

Il valore $x = a$ sostituito nell'equazione ci dà $y = 0$, adunque la medesima x sarà $= a = GA$, a cui corrisponde $y = 0$. Il valore $x = 0$ sostituito ci dà $y = \infty$; adunque per lo punto G, in cui $x = 0$, condotta una parallela alle ordinate, toccherà la curva in infinita distanza, vale a dire, sarà un'asintoto.

Rispetto agli altri due casi: (*Fig.* 57. 58.) sia $GA = GK = a$, $GP = b$, ed il resto come sopra. La supposizione di $dy = 0$ ci darà $-x^4 - bx^3 - aabx - aabb = 0$, cioè $\overline{x+b} \times \overline{-x^3 - aab} = 0$, e però $x = -b$, $x = \sqrt[3]{-aab}$.

La

La ſuppoſizione di $dy = \infty$ ci darà

$xx\sqrt{aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 - bbxx + aabb} = 0$, cioè

$xx\sqrt{\overline{x+b}^2 \times \overline{aa - xx}} = 0$, e però $x = 0$, $x = -b$, $x = a$, $x = -a$.

Il valore $x = -b$, che nel ſecondo caſo ſoſtituito nell'equazione rende $y = 0$, ci viene ſomminiſtrato da ambedue le ſuppoſizioni, adunque (*Fig.* 57.) preſa GP dalla parte de' negativi, ed $= -b$, il punto P ſarà un' incontro, o ſia una interſecazione di due rami di curva. Lo ſteſſo valore $x = -b$, ſoſtituito nell' equazione della curva $\pm y = \frac{b+x}{x}\sqrt{aa - xx}$, ci dà nel terzo caſo negativo il radicale, per eſſere b maggiore di a, e però immaginaria la curva, quindi a nulla ſerve.

Il valore $x = \sqrt[3]{-aab}$, ſoſtituito nell'equazione della curva, ci dà $y = \pm\sqrt{\frac{aa - bb\sqrt[3]{abb} + 3ab\sqrt[3]{-aab} + 3abb}{\sqrt[3]{abb}}}$,

cioè immaginaria pure, quando ſia b maggiore di a (*Fig.* 58.), e però ſimilmente a nulla ſerve in queſto terzo caſo; ma ci dà y reale quando ſia b minore di a, e però (*Fig.* 57.), fatta $GI = \sqrt[3]{-aab}$, ſarà IN la maſſima ordinata $y = \pm\sqrt{\frac{aa - bb\sqrt[3]{abb} + 3ab\sqrt[3]{-aab} + 3abb}{\sqrt[3]{abb}}}$.

Il valore $x = 0$ ci dà $y = \infty$, cioè afintoto; Il valore $x = \pm a$ ci dà $y = 0$, cioè la tangente ne' punti A, K parallela all'ordinate.

ESEMPIO IX.

86. Sia la mezza Cicloide abbreviata AMF (*Fig.* 59.), chiamata $AB = 2a$, $BF = b$, $AP = x$, $PM = z$, la femiperiferia $ANB = c$, l'arco $AN = q$; farà $PN = \sqrt{2ax - xx}$, $NM = z - \sqrt{2ax - xx}$, e per la proprietà della curva, è ANB, $BF :: AN$, NM; cioè c, $b :: q$, $NM = \frac{bq}{c}$; dunque $\frac{bq}{c} = z - \sqrt{2ax - xx}$. Differenziando, $\frac{bdq}{c} = dz - \frac{adx + xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$; ma condotta mp infinitamente proffima ad MP, farà $Nn = dq = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, quindi fatta la foftituzione nell'equazione, averemo $\frac{dz}{dx} = \frac{ab + ac - cx}{c\sqrt{2ax - xx}}$. La fuppofizione di $dz = 0$ ci dà $x = \frac{ab}{c} + a$. Se adunque H fia il centro del circolo, prefa HE eguale alla quarta proporzionale della femiperiferia ANB, della retta BF, e del raggio, la corrifpondente ordinata farà la maffima, che fi cerca.

La

La supposizione di $dz = \infty$ ci dà $x = 0$, ed $x = 2a$, vale a dire, che ne' punti A, F la tangente sarà parallela alle ordinate.

PROBLEMA I.

87. *Dato il rettangolo* ADCB, (Fig. 60.) *si dimanda la minima retta* QH, *che si possa condurre per lo punto* C *nell' angolo* QAH.

Sia $AB = a$, $BC = b$, $BH = x$, sarà $CH = \sqrt{bb + xx}$, e per i triangoli simili HBC, HAQ, averassi HB, $HC :: HA$, HQ; cioè x, $\sqrt{bb + xx} :: x + a$, $HQ = \frac{\overline{x + a}\sqrt{bb + xx}}{x}$. Supposta per tanto la $HQ = y$, come se fosse l'ordinata di una curva, onde si abbia $y = \frac{\overline{x + a}\sqrt{bb + xx}}{x}$, e differenziando, sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - abb}{xx\sqrt{bb + xx}}$. La supposizione di $dy = 0$ ci darà $x = \sqrt[3]{abb}$, e però fatta $BH = \sqrt[3]{abb}$, e condotta HCQ, sarà essa la minima, che si cerca. La supposizione di $dy = \infty$ ci darà $x = \sqrt{-bb}$ immaginaria, ed $x = 0$, che a nulla serve, quando non s'intenda, che la retta condotta per lo punto C, che in questo caso sarebbe BC infini-

tamente prodotta, sia un massimo, appunto per esser infinita.

In queste tali questioni adunque basterà differenziare quell'espressione, che si vuole essere un massimo, o minimo, ed indi supporre eguale al zero il numeratore, poi il denominatore.

PROBLEMA II.

88. *Divisa la retta* AB (Fig. 61.) *in tre parti date* AC, CF, FB, *si dimanda il punto* E, *in cui devesi tagliare la porzione di mezzo* CF *per modo, che il rettangolo* AE × EB *abbia al rettangolo* CE × EF *la minima ragione possibile.*

Si chiami $AC = a$, $CF = b$, $CB = c$, e $CE = x$; sarà $AE = a + x$, $EB = c - x$, $EF = b - x$, e però sarà il rapporto $\frac{AE \times EB}{CE \times EF} = \frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$, che deve essere un minimo. Il differenziale adunque sarà $\frac{cxxdx - bxxdx - axxdx + 2acxdx - abcdx}{\overline{bx - xx}^2}$, e posto il numeratore eguale al zero, averemo $x = \frac{-ac \pm \sqrt{abcc - abbc - aabc + aacc}}{c - b - a}$. Un valore positivo, che ci dà il punto ricercato E da C verso B, l'altro

l'altro negativo, che ci darebbe il punto E da C verso A. Posto il denominatore eguale al zero, averemo $x = 0$, ed $x = b$, ne' quali due casi il rapporto de' rettangoli sarà il massimo, perchè presa $x = 0$, il punto E cade in C; e presa $x = b$, il punto E cade in F, e però sì nell' uno, come nell' altro caso il rettangolo $CE \times EF$ è zero.

PROBLEMA III.

89. *La data retta* AB *si debba tagliare talmente nel punto* C, *che il prodotto* $\overline{AC}^2 \times CB$ *sia il massimo di tutti i prodotti simili.*

Chiamata $AB = a$, $AC = x$, sarà $CB = a - x$, e però $\overline{AC}^2 \times CB = axx - x^3$. Il differenziale sarà $2axdx - 3xxdx$, il quale paragonato al zero, darà $x = \frac{2a}{3}$, ed $x = 0$. Presa per tanto $AC = x = \frac{2a}{3}$, il prodotto $\overline{AC}^2 \times CB$ sarà il massimo; e presa $x = 0$, il prodotto sarà in un certo modo il minimo, perchè sarà zero, cadendo il punto C in A. Non essendo la differenziale una frazione, non â luogo l'altra solita supposizione del denominatore eguale a zero, ma se si voglia considerare l'espressione del prodotto $axx - x^3$,

come

come un'ordinata di curva, converrà per la legge degl' omogenei dividere esso prodotto per un piano costante, e così il differenziale sarà una frazione del denominatore costante; ma essa costante non può mai esser zero, se non relativamente alla x assunta infinita, e certamente, che allora il prodotto sarà un massimo, quando sia $AC = x = \infty$.

'O detto, che il prodotto $\overline{AC}^2 \times CB$ è un massimo, quando sia $AC = \frac{2a}{3}$, il che chiaramente si vede dal descrivere la curva dell' equazione $\frac{axx - x^3}{aa} = y$; poichè tutte le ordinate tra A, e B sono minori di quella, che corrisponde all' assissa $x = \frac{2a}{3}$. Sostituito nell' equazione l'altro valore $x = 0$, sarà $y = 0$, dal che si conchiude, che esso valore a nulla serve.

90. Nel Problema antecedente, ed in tutti quelli di simil natura si può fare uso di questo metodo per conoscere, se le questioni sono de' Massimi, o de' Minimi.

PROBLEMA IV.

91. *Fra tutti i parallelepipedi eguali ad un dato cubo, e de' quali sia dato un lato, si dimanda quello, che abbia la minor superficie.*

Il

Il dato cubo sia a^3, ed il lato cognito del parallelepipedo sia $= b$, uno de' lati, che si cercano, sia $= x$; il terzo sarà $= \frac{a^3}{bx}$, poichè il prodotto de' tre, forma il parallelepipedo eguale al dato cubo a^3. I prodotti dei lati presi a due a due, cioè bx, $\frac{a^3}{x}$, $\frac{a^3}{b}$ formano i tre piani, che sono la metà della superficie del parallelepipedo, e però la somma di questi, cioè $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$ deve essere il minimo, che si cerca. Differenziando adunque, avremo $bdx - \frac{a^3 dx}{xx}$, o sia $\frac{bxxdx - a^3 dx}{xx}$. La supposizione del numeratore eguale al zero ci dà $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$; saranno adunque i tre lati del parallelepipedo, che si cerca, b, $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, ed $\frac{a^3}{b\sqrt{\frac{a^3}{b}}}$, cioè $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, e però eguali saranno i due lati, che si cercano. La supposizione del denominatore eguale al zero a nulla serve, perchè ci dà $x = 0$, il che distrugge il problema.

Se si volesse il parallelepipedo con le assegnate con-

condizioni, ma ſenza aſſumere lato alcuno per dato, chiamatone uno $= x$, ſono gl'altri due eguali tra loro, ed $= \sqrt{\frac{a^3}{x}}$, e la ſomma de' tre piani, che deve eſſere un minimo, ſarà $2x\sqrt{\frac{a^3}{x}} + \frac{a^3}{x}$, e differenziando,

$$\frac{a^3dx}{x\sqrt{\frac{a^3}{x}}} - \frac{a^3dx}{xx}, \text{ o ſia } \frac{a^3xdx - a^3dx\sqrt{\frac{a^3}{x}}}{xx\sqrt{\frac{a^3}{x}}},$$

e fatto il numeratore eguale al zero, ſi averà $x = a$, e gl'altri due lati parimenti $= a$, ed il cubo ſteſſo ſarà il parallelepipedo, che ſi cerca.

PROBLEMA V.

92. *Fra gl'infiniti coni inſcritti in una sfera, determinare quello, la di cui ſuperficie conveſſa, cioè non compreſa la baſe, ſia la maſſima.*

Nel ſemicircolo ABD (*Fig.* 62.) ſieno i triangoli ABC, AEH, e ſi giri il ſemicircolo attorno al diametro AD; nel mentre, che egli deſcrive la sfera, i triangoli deſcriveranno tanti coni, ma poichè da Archimede ſi dimoſtra, che le ſuperficie de' coni inſcritti ſono tra loro, come i prodotti $AE \times EH$, $AB \times BC$,

la

la queſtione ſi riduce a determinare nel diametro AD il punto C tale, che il prodotto $AB \times BC$ ſia il maſſimo.

Chiamo adunque $AC = x$, $AD = a$; ſarà, per la proprietà del circolo, $CB = \sqrt{ax - xx}$, $AB = \sqrt{ax}$, ed $AB \times BC = \sqrt{ax}\sqrt{ax - xx} = \sqrt{aaxx - ax^3}$. Differenziando adunque, averemo $\frac{2aaxdx - 3axxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}}$, e fatto il numeratore $= 0$, ſarà $x = \frac{2a}{3}$, ed $x = 0$; fatto il denominatore $= 0$, ſarà $x = a$, ed $x = 0$. Preſa adunque $AC = \frac{2}{3} AD$, la ſuperficie del cono deſcritto dal triangolo ABC ſarà la maſſima, che ſi cerca. Gl' altri due valori $x = 0$, ed $x = a$ non ſervono, come è chiaro.

PROBLEMA VI.

93. *Dato l' angolo* FDG, (Fig. 63.) *e dato di poſizione il punto* A, *ritrovare la minima retta, che nel dato angolo paſſi per lo punto* A.

Sia CB quella, che ſi cerca, e ſi tiri AQ normale ad FD, FAP normale a DG, e CK normale ad

FP. Poichè è dato l'angolo FDG, e l'angolo FPD è retto, farà noto l'angolo AFQ, ma è in oltre dato di posizione il punto A, dunque saranno note le QA, QF, FA, QD. Sia per tanto $QF = a$, $QA = c$, $QD = b$, e la $QC = x$, farà $FA = \sqrt{aa + cc}$, $CA = \sqrt{cc + xx}$, $FD = b + a$, $FC = a - x$. Ma per i triangoli simili FAQ, FDP, è FA, $FQ :: FD$, FP; adunque $FP = \frac{aa + ab}{\sqrt{aa + cc}}$, e però $AP = \frac{ab - cc}{\sqrt{aa + cc}}$; e per i triangoli simili FCK, FAQ, è AF, $FQ :: FC$, FK, adunque $FK = \frac{aa - ax}{\sqrt{aa + cc}}$, onde $AK = \frac{cc + ax}{\sqrt{aa + cc}}$; e finalmente per i triangoli simili ACK, ABP, farà AK, $CA :: AP$, AB; adunque $AB = \frac{ab - cc \sqrt{cc + xx}}{cc + ax}$, e però $CB = \sqrt{cc + xx} + \frac{ab - cc \sqrt{cc + xx}}{cc + ax}$, che deve esser la minima. Differenziando farà

$$\frac{xdx}{\sqrt{cc + xx}} + \frac{xdx \times \overline{ab - cc} \times \overline{cc + ax} - adx \times \overline{ab - cc} \times \overline{cc + xx}}{\overline{cc + ax}^2 \times \overline{cc + xx}^{\frac{1}{2}}},$$

e posto il numeratore $= 0$, (riducendo prima al comun denominatore) farà $x^3 + \frac{2ccxx}{a} + \frac{bccx}{a} + \frac{c^4 - bcc}{a} = 0$, equazione solida.

Per

Per coſtruirla prendo l'equazione alla parabola $xx = ay$; fatta la ſoſtituzione, ſarà $xy + \frac{2ccy}{a} + \frac{bccx}{aa} + \frac{c^4}{aa} - \frac{bcc}{a} = 0$, luogo all'iperbola fra gl'aſintoti.

Ciò poſto, ſulla retta QD ſi prenda $QM = \frac{2cc}{a}$, e condotta dal punto M parallella ad AQ la retta $MN = \frac{bcc}{aa}$, ſi tiri NS parallella a QD, e fra gl'aſintoti NS, NT ſi deſcriva l'iperbola HOV del rettangolo coſtante $= \frac{2bc^4 + aabcc - ac^4}{a^3}$, e ſieno ſulla retta QF le x preſe dal punto Q; e ad eſſe normali le y. Indi all'aſſe AQ, vertice Q, parametro $= a$ ſi deſcriva la parabola QO dell'equazione $xx = ay$; dal punto O, in cui la parabola taglia l'iperbola, condotta OC parallela ad AQ, e dal punto C condotta per lo punto A la retta CAB, ſarà eſſa la minima, che ſi cerca.

Ed in fatti, per la coſtruzione, è $NS = x + \frac{2cc}{a}$, $SO = y + \frac{bcc}{aa}$, e per la proprietà dell'iperbola, deve eſſere $NS \times SO =$ al rettangolo coſtante, dunque $xy + \frac{2ccy}{a} + \frac{bccx}{aa} + \frac{2bc^4}{a^3} = \frac{2bc^4 + aabcc - ac^4}{a^3}$, ma

$CO = y = \frac{xx}{a}$, per la proprietà della parabola, dunque sostituito in luogo di y questo valore, averemo $\frac{x^3}{a} + \frac{2ccxx}{aa} + \frac{bccx}{aa} = \frac{bcc}{a} - \frac{c^4}{aa}$, cioè $x^3 + \frac{2ccxx}{a} + \frac{bccx}{a} + \frac{c^4}{a} - bcc = 0$, che è l'equazione, da cui si doveva ricavare il valore della x, adunque ec.

'O fatta la supposizione, che sia zero il numeratore della frazione, che esprime il minimo.

L'altra supposizione, che sia zero il denominatore, darà $\overline{cc + ax}^2 \sqrt{cc + xx} = 0$, cioè $\sqrt{cc + xx} = 0$, $cc + ax = 0$; ma $\sqrt{cc + xx} = 0$ ci dà $x = \sqrt{-cc}$ immaginaria, e però non serve; $cc + ax = 0$ ci dà $x = -\frac{cc}{a}$, ma presa $Qc = x = -\frac{cc}{a}$, e condotta Ac, sarà il triangolo QAc simile al triangolo QFA, o sia PFD, e però l'angolo QcA eguale all'angolo FDP; quindi cA sarà parallela alla DP, vale a dire la condotta dal punto c, e per lo punto A nel dato angolo FDG sarà infinita, che in certo modo è un massimo.

Più brevemente ancora si può vedere, che in questo caso la retta, che si cerca, sarà infinita; poichè

nell'

nell' espressione $\sqrt{cc + xx} + \frac{ab - cc}{cc + ax}\sqrt{cc + xx} = CB$, sostituito in luogo di x il valore $-\frac{cc}{a}$, il denominatore diviene zero, e però la linea infinita.

CAPO

CAPO IV.

De' Flessi contrarj, e de' Regressi.

94. Cosa sieno i Flessi contrarj, ed i Regressi, è stato abbastanza detto nel Lib. I. Cap. VI., poste le quali notizie: Sia la curva $ADEM$ (*Fig.* 64.) con le coordinate parallele, la quale abbia in E un flesso contrario, o regresso; presa una qualunque assissa $AB = x$, l'ordinata $BD = y$, e condotta CF parallela, ed infinitamente prossima a BD, egli è manifesto, che assunta $dx = BC$ costante, crescendo sempre più la assissa $AB = x$, la differenza GF dell'ordinata BD, cioè la dy si farà sempre minore fin'a tanto, che l'ordinata sia la HE, che corrisponde al punto del flesso contrario, o del regresso, dopo del qual punto nell'uno, e nell'altro caso la dy anderà sempre facendosi maggiore. Adunque nel punto del flesso contrario, e del regresso la dy sarà un minimo; onde, per lo metodo de' massimi, e minimi, $ddy = 0$, o pure $ddy = \infty$ sarà la formola de' flessi contrarj, e de' regressi.

Se la curva sarà (*Fig.* 65.) prima convessa, e poi concava all' asse AH: crescendo parimente la assissa, cresce la differenza dell' ordinata fino al punto E del

flesso

flesso contrario, o regresso, dopo di cui va calando; sarà adunque in quel punto la dy un massimo, e però istessamente si dovrà porre $ddy = 0$, o pure $ddy = \infty$.

Lo stesso s'inferisca ancora dal considerare, che nelle curve prima concave all' asse la differenza seconda dell' ordinata y, cioè la ddy è negativa fino al punto E di regresso, o di flesso contrario, di poi si fa positiva; e nelle curve prima convesse essa differenza seconda è positiva fino al punto E, di poi si fa negativa; ma una quantità qualunque non può da negativa farsi positiva, o da positiva farsi negativa, se non passando per lo zero, o per l'infinito, adunque nel punto E di regresso, o di flesso contrario deve essere $ddy = 0$, o pure $ddy = \infty$.

Sia tangente della curva AEM prima concava all' asse (*Fig.* 64.) nel punto D la retta DT, e nel punto E la retta EP; crescendo l'assissa AB, crescerà sempre l'intercetta AT fra la tangente, e l'origine delle assisse fino a tanto, che il punto B cada in H, dopo di che nel caso del flesso contrario crescendo ancora l'assissa, calerà essa intercetta, adunque nel punto E di flesso contrario l'intercetta $AP = \frac{ydx}{dy} - x$ dovrà essere un massimo, e però differenziando, presa dx costante, $\frac{dy^2 dx - ydxddy - dy^2 dx}{dy^2}$ eguale al zero, o all' infinito,

cioè

cioè riducendo, dividendo per $-ydx$, e moltiplicando per dy^2, sarà finalmente $ddy = o$, o pure $ddy = \infty$. Nel caso, che il punto E sia di regresso, crescendo l'intercetta AT, crescerà pure l'assissa AB, fino a che il punto T cada in P, e l'assissa sarà AH, oltre il qual punto T l'assissa anderà calando; sarà adunque AH un massimo, e però la sua differenza eguale al zero, o all' infinito, adunque relativamente a tale differenza sarà infinita, o zero la differenza di AP, e però $ddy = \infty$, o pure $ddy = o$, come prima.

Se la curva (*Fig.* 65.) sia prima convessa all' asse, l'intercetta AT sarà $= x - \frac{ydx}{dy}$, e la differenza $\frac{dxdy^2 - dxdy^2 + ydxddy}{dy^2}$, o sia $\frac{ydxddy}{dy^2}$, e però dividendo per ydx, e moltiplicando per dy^2, si avrà nè più, nè meno $ddy = o$, o pure $ddy = \infty$.

Nella curva DEM, (*Fig.* 66.) essendo A l'origine delle assisse x, ed E il punto del flesso contrario, l'intercetta AP sarà $= AH + HP$, ma in tale caso la sottotangente HP è negativa, vale a dire $-\frac{ydx}{dy}$, adunque sarà $AP = x - \frac{ydx}{dy}$, onde si vede, che in nessun modo essa intercetta AP potrà essere $x + \frac{ydx}{dy}$.

95. Serve la ritrovata formola per le curve, che ânno

ânno le ordinate parallele, cioè che sono riferite ad un' asse, o diametro; ma ella è diversa nelle curve riferite al fuoco.

Sia (*Fig.* 67. 68.) la curva ADE, il fuoco Q, da cui partono le ordinate QD, e sia Qd infinitamente prossima alla QD; condotta QT normale a QD, e Qt normale a Qd, si tiri DT tangente della curva nel punto D, e (dt) tangente nel punto d; la Qt prodotta, se fa bisogno, incontrerà DT nel punto o. Ora è chiaro, che crescendo le ordinate, se la curva è concava verso il fuoco Q, (*Fig.* 67.) sarà Qt maggiore di QT; ma se la curva è convessa verso il fuoco Q, (*Fig.* 68.) sarà Qt minore di QT; adunque nel passare la curva da concava ad esser convessa, o vicendevolmente, cioè nel punto del flesso contrario, e regresso, la quantità (ot) dovrà farsi da positiva negativa, o all' opposto, e però dovrà passare per lo zero, o per l'infinito.

Sia pertanto $QD=y$, $DM=dx$, e col centro Q si descrivano gli archi infinitesimi DM, TH; saranno simili i due triangoli dMD, dQT, siccome dQo, THo, e però sarà $dM, MD :: dQ$, o sia DQ, QT, cioè $dy, dx :: y$, $QT=\frac{ydx}{dy}$, ma sono simili pure i due settori DQM, TQH; quindi QD, $DM :: QT$, TH, cioè $y, dx :: \frac{ydx}{dy}$, $TH=\frac{dx^2}{dy}$, e per la similitudine de' trian-

goli dQo, THo, farà dQ (o sia DQ), Qo (o sia QT) :: TH, Ho; cioè y, $\frac{ydx}{dy}$ :: $\frac{dx^2}{dy}$, $Ho = \frac{dx^3}{dy^2}$; ma Ht (*Fig.* 67.) è la differenza di QT, cioè $Ht = \frac{dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$, (presa per costante dx) adunque $to = tH + Ho = \frac{dxdy^2 - ydxddy + dx^3}{dy^2}$, che deve essere eguale al zero, o all'infinito, e però anche moltiplicando per dy^2, e dividendo per dx, farà $dy^2 - yddy + dx^2$ eguale al zero, o all'infinito.

Nella *Fig.* 68. la (ot) viene ad esser negativa, e però $= \frac{-dxdy^2 + ydxddy - dx^3}{dy^2}$, onde dividendo per $-dx$, e moltiplicando per dy^2, farà $dx^2 + dy^2 - yddy$ eguale al zero, o all'infinito.

Se per tanto una curva qualunque riferita al fuoco Q, (*Fig.* 69.) le di cui ordinate $QB = y$, e gli archetti $BC = dx$, averà un flesso contrario, o regresso, la formola generale per determinarlo farà $dy^2 + dx^2 - yddy = 0$, o pure $dy^2 + dx^2 - yddy = \infty$.

Se si supponga y infinita, nella formola $dx^2 + dy^2 - yddy$ saranno nulli i primi due termini rispetto al terzo, e però farà $-yddy$ eguale al zero, o all'infinito, e dividendo per $-y$, averemo $ddy = 0$, o $ddy = \infty$, cioè

cioè la formola del primo caſo delle curve riferite al diametro, come appunto deve ſuccedere; perchè, ſuppoſta y infinita, le ordinate ſono tra loro parallele.

96. Data la natura della curva, per mezzo di un' equazione, e ſuppoſta dx coſtante, differenziando due volte, ſe l'equazione è algebraica; una ſola, ſe è differenziale del primo grado, a fine di avere il valore della ddy dato per dx, queſto paragonato al zero, indi all'infinito ci fornirà i valori dell'aſſiſſa x, ai quali corriſponde l'ordinata y, che incontra la curva ne' punti di fleſſo contrario o regreſſo, ſe però, poſti tali valori in luogo di x nell'equazione della curva, ſi abbia la y reale; che ſe la y ſarà immaginaria, o involverà contradizione, la curva non avrà tali punti.

97. Per diſtinguere i fleſſi contrarj dai regreſſi, giacchè il metodo ci dà confuſamente gl'uni, e gl'altri, baſterà vedere a un di preſſo l'andamento della curva, e queſto ci darà il lume neceſſario per determinarli.

98. Un' altra ſorta di regreſſo poſſono avere le curve diverſa da quella, che ora ſi è conſiderata, ed è quando la curva ritorna indietro verſo la ſua origine rivoltando la ſua concavità a quella ſteſſa parte, a cui la rivolgeva prima del regreſſo. Dopo aver trattato de' Raggi Oſculatori, darò alla fine del ſeguente Ca-

po la formola generale anche per i regressi di questa seconda sorta.

ESEMPIO I.

99. Sia (*Fig.* 51.) la parabola cubica dell' equazione $y = a + \sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx}$, che si è veduto nell'Esempio V. del Capo antecedente num. 81. avere un punto d'incontro. Differenziando è adunque $dy = -\frac{2aadx + 2axdx}{3 \times \overline{a^3 - 2aax + axx}^{\frac{2}{3}}}$, e differenziando di nuovo, presa dx costante, sarà

$$ddy = -\frac{2adx^2}{9 \times \overline{a^3 - 2aax + axx}^{\frac{2}{3}}}.$$

La supposizione di $ddy = 0$ ci dà $-2adx^2 = 0$, il che non serve; fatta adunque la supposizione di $ddy = \infty$, sarà $9 \times \overline{a^3 - 2aax + axx}^{\frac{2}{3}} = 0$, cioè $aa - 2ax + xx = 0$, e però $x = a$. Sostituito, in luogo di x, questo valore nella proposta equazione, sarà $y = a$, adunque la curva â un flesso contrario, o regresso, che corrisponde alla assissa $x = a$, alla quale compete l'ordinata $y = a$, e perchè si sa altronde, essere pure questo un

un punto d'incontro, non potrà dunque essere un flesso contrario, ma bensì un regresso.

Sia la stessa parabola cubica, ma prese le assisse $AB = x$ dal vertice A, (*Fig.* 70.) e BC le y. L'equazione è $axx = y^3$, e differenziando $2axdx = 3yydy$, e differenziando di nuovo, presa dx costante, $ddy = \frac{-6ydy^2 + 2adx^2}{3yy}$; ma per l'equazione, si â $3yy = 3x\sqrt[3]{aax}$, e per la prima differenziazione, $dy = \frac{2axdx}{3x\sqrt[3]{aax}}$, adunque fatte le sostituzioni, sarà $ddy = -\frac{2adx^2}{9x\sqrt[3]{aax}}$.

La supposizione di $ddy = 0$ non serve; la supposizione di $ddy = \infty$ ci dà $9x\sqrt[3]{aax} = 0$, cioè $x = 0$, il qual valore sostituito nell'equazione rende $y = 0$, adunque la curva â un regresso nel vertice A.

ESEMPIO II.

100. Sia la versiera DFM, (*Fig.* 71.) la di cui equazione $y = a\sqrt{\frac{a-x}{x}}$, $AB = x$, $BF = y$, $AD = a$.

Diffe-

Differenziando, $dy = -\frac{aadx}{2x\sqrt{ax-xx}}$, e di nuovo differenziando, presa dx costante, $ddy = \frac{3a^3dx^2 - 4aaxdx^2}{4x \times \overline{ax-xx}^{\frac{3}{2}}}$.

La suppofizione di $ddy = 0$ ci dà $3a^3 - 4aax = 0$, cioè $x = \frac{3a}{4}$, il qual valore fostituito nell'equazione della curva rende $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, onde presa $AB = \frac{3}{4}a$, la ordinata $BF = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ incontrerà la curva nel punto F, che farà un flesso contrario. La suppofizione di $ddy = \infty$ ci dà $4x \times \overline{ax-xx}^{\frac{3}{2}} = 0$, cioè $x = 0$, ed $x = a$, il primo valore fostituito nell'equazione rende $y = \infty$, il fecondo $y = 0$; ma nè l'uno, nè l'altro cafo porta flesso contrario, e porta folo, che sì l'afintoto AQ, come la tangente nel punto D è parallela alle ordinate.

ESEMPIO III.

101. Sia (*Fig.* 72. 73., *e* 74.) la Cicloide dell'equazione $dz = \frac{ardx + brdx - bxdx}{b\sqrt{2rx-xx}}$ num. 47. Differenziando

ziando, sarà $ddz = \frac{\overline{arx - arr - brr} \times dx^2}{b \times \overline{2rx - xx}^{\frac{3}{2}}}$.

La supposizione di $ddz = 0$ ci dà $arx - arr - brr = 0$, cioè $x = r + \frac{br}{a}$. Se a sia maggiore di b, la cicloide sarà l'allongata; onde, presa CE dal centro eguale alla quarta proporzionale di BF, del semicircolo, e del raggio, e condotta l'ordinata ED, (*Fig.* 73.) incontrerà essa la curva nel punto del flesso contrario D. Se sia a minore di b, (*Fig.* 74.) la cicloide sarà la raccorciata; ma quando $a < b$, la $x = r + \frac{br}{a}$ sarà maggiore di $2r$, cioè maggiore di AB, nel qual caso le ordinate sono immaginarie, perchè non vi è curva al di sotto del punto F, adunque la curva non â flessi contrarj, nè regressi. Se sia $a = b$, la cicloide sarà l'ordinaria, (*Fig.* 72.) e però $x = r + \frac{br}{a} = 2r = AB$, ed $y = BF$, il che non ci dà flesso contrario, o regresso; ma bensì ci fa sapere, che la tangente in F sarà parallela alle assisse, o sia al diametro AB.

La supposizione di $ddz = \infty$ ci dà $b\sqrt{\overline{2rx - xx}^{\frac{3}{2}}} = 0$, cioè $x = 0$, ed $x = 2r$. Il valore $x = 0$ in tutti tre i casi ci dà la tangente nel punto A parallela alle ordinate. Il valore $x = 2r$ nel primo, e secondo caso ci

dà

dà la tangente nel punto F istessamente parallela alle ordinate; ma nel terzo caso ci dà una contradizione, poichè essendo l'equazione $dz = \frac{dx \sqrt{2r - x}}{\sqrt{x}}$, sostituito in luogo di x il valore $2r$, sarà $dz = 0$, ma non può essere $dz = 0$, e assieme $ddz = \infty$, adunque tale valore a nulla serve in questo caso.

ESEMPIO IV.

102. Sia la Concoide di Nicomede di sopra considerata al num. 85., la di cui equazione è
$yy = \frac{aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 - bbxx + aabb}{xx}$, o sia
$y = \frac{\overline{b + x} \sqrt{aa - xx}}{x}$. Differenziando, sarà
$dy = - \frac{x^3 dx - aabdx}{xx \sqrt{aa - xx}}$, e di nuovo differenziando, presa dx costante, $ddy = \frac{2a^4 b - aax^3 - 3aabxx}{x^3 \times \overline{aa - xx}^{\frac{3}{2}}} \times dx^2$.

A riguardo de' tre soliti casi, che può avere questa curva, comincio dal primo quando $a = b$. (*Fig.* 56.) Ciò posto, sarà $ddy = \frac{2a^5 - aax^3 - 3a^3 xx}{x^3 \times \overline{aa - xx}^{\frac{3}{2}}} \times dx^2$.

La

La ſuppoſizione di $ddy = 0$ ci dà $2a^5 - aax^3 - 3a^4xx = 0$, cioè $x^3 + 3axx - 2a^3 = 0$, e riſolvendo l'equazione, $x = \sqrt{3aa} - a$, $x = -\sqrt{3aa} - a$, $x = -a$; il primo valore ci dà l'aſſiſſa $GE = x = \sqrt{3aa} - a$, a cui compete l'ordinata $EM = y = \frac{\sqrt{3aa}\sqrt{2a\sqrt{3aa} - 3aa}}{\sqrt{3aa} - a}$, che incontra la curva nel punto M del fleſſo contrario; il ſecondo valore a nulla ſerve, perchè rende l'equazione della curva immaginaria; il terzo ci dà un regreſſo nel punto P.

Riguardo agli altri due caſi, la ſuppoſizione di $ddy = 0$ ci dà $2aab - x^3 - 3bxx = 0$, o ſia $x^3 + 3bxx - 2aab = 0$. Per avere adunque le radici di queſt'equazione, pongo $xx = bz$, luogo alla parabola apolloniana, e fatta la ſoſtituzione, naſce il ſecondo luogo $xz + 3bz - 2aa = 0$, all'iperbola.

Fra gli aſintoti AQ, AD, fatta $AC = 2a$, CN normale $= a$, $AD = 3b$, e preſe ſull'aſintoto AD dal punto D le x, ſi deſcriva (*Fig.* 75.) l'iperbola GNF del rettangolo coſtante $= 2aa$, paſſerà eſſa per lo punto N; indi alzata DM normale alla DA, all'aſſe DM, vertice D, parametro $= b$, ſi deſcriva la parabola dell'equazione $xx = bz$.

Se adunque ſi aſſuma b maggiore di a, poichè $AD = 3b$, $AC = 2a$, ſarà CD maggiore di b, ora preſa

 nella

nella parabola la assissa $z = a = CN$, l'ordinata sarà $x = \sqrt{ab}$, ma se a è minore di b, sarà anco $\sqrt{ab}$ minore di b, e però anco minore di CD; adunque la parabola taglierà l'iperbola tra N, e D nel punto, per esempio, I.

Ciò posto, se si assuma $x = -a$, sarà nella parabola $z = \frac{aa}{b}$, e nell'iperbola $z = \frac{2aa}{-a+3b}$, ma $\frac{aa}{b}$ è maggiore di $\frac{2aa}{-a+3b}$, dunque la parabola taglia l'iperbola nel punto I tale, che sarà $HI = -x$ minore di a, e però questa assissa averà nella concoide (*Fig.* 58.) la ordinata reale, che ci determina il flesso contrario nel punto, per esempio N, del ramo inferiore KN. La GM condotta dal punto G, altra intersecazione della parabola, e dell'iperbola, sarà necessariamente maggiore di a, e però a tale assissa non corrisponde nella concoide ordinata alcuna reale, onde questo valore a nulla serve. Finalmente il terzo valore TF ci darà l'assissa, a cui compete l'ordinata nel ramo superiore, che incontra la curva nel flesso contrario M.

Sia b minore di a, sarà (*Fig.* 76.) CD minore di b, e presa nella parabola la $z = a = CN$, l'ordinata sarà $x = \sqrt{ab}$, cioè maggiore di b, e però maggiore di CD, adunque la parabola passerà tra N, e C, quindi o non taglierà essa l'iperbola, e i due valori negativi della x

nell'

nell' equazione $x^3 + 3bxx - 2aab = 0$ saranno immaginarj; o se la taglia, saranno essi sempre maggiori di a, ai quali nella concoide (*Fig.* 57.) corrispondono ordinate immaginarie, e però a nulla servono. Taglierà però la parabola certamente l'iperbola dalla parte de' positivi nel punto, per esempio F; quindi la TF, che è minore di a, sarà il valore della x, a cui corrisponde l'ordinata nel ramo AM della concoide, che l'incontra nel punto del flesso contrario M.

Dissi, che se la parabola taglia l'iperbola tra N, ed O, i due valori negativi della x saranno maggiori di a; imperciocchè, presa $x = -a$ nella parabola, sarà $z = \frac{aa}{b}$, e nell'iperbola $z = \frac{2aa}{3b - a}$, ma $\frac{aa}{b}$ è minore di $\frac{2aa}{3b - a}$; dunque fino a tanto, che x negativa non sia maggiore di a, la parabola non taglierà l'iperbola, dunque la taglierà in un punto, in cui essa x sarà maggiore di a. Presa x positiva $= a$, sarà nella parabola $z = \frac{aa}{b}$, e nell'iperbola $z = \frac{2aa}{3b + a}$; ma $\frac{aa}{b}$ è maggiore di $\frac{2aa}{3b + a}$, dunque la parabola taglierà l'iperbola in un punto F tale, che sarà TF minore di a.

La supposizione di $ddy = \infty$ ci dà $x^3 \times \overline{aa - xx}^{\frac{3}{2}} = 0$, cioè $x = 0$, ed $x = \pm a$; vale a dire, che l'asintoto,

e la tangente in A ſono parallele alle ordinate in tutti tre i caſi, ſiccome la tangente in K nel ſecondo, e terzo caſo; e nel primo, che in P vi è un punto d'incontro (come appunto portano i regreſſi) per eſſerci ſtato ſomminiſtrato lo ſteſſo valore $x = -a$ anche dalla ſuppoſizione di $ddy = 0$; il quale punto d'incontro ſi è trovato pure al num. 85.

103. In altro modo. Prendo la ſteſſa Curva Concoide, ma con le ordinate tutte, che partano da un punto fiſſo, cioè dal polo P.

Sia adunque $PM = y$, (*Fig.* 56. 57., *e* 58.) e condotta PF infinitamente proſſima a PM, e col centro P deſcritti gl' archetti MB, DH, ſia $MB = dx$, $AG = a$, $GP = b$, e chiamata $PD = z$, $HO = dz$, per la proprietà della curva, ſarà l'equazione $y = z \pm a$, cioè $y = z + a$ riſpetto alla curva ſuperiore al di ſopra dell'aſintoto GR, ed $y = z - a$ riſpetto alla curva inferiore. Differenziando adunque nell'uno, e nell'altro caſo, ſarà $dy = dz$. Per la ſimilitudine de' triangoli PGD, DHO (giacchè gl'angoli GDP, DOH non differiſcono, ſe non per l'angolo infiniteſimo DPH, e gl'angoli H, G ſono retti) ſi averà $PG, GD :: DH, HO$; cioè $b, \sqrt{zz - bb} :: \frac{zdx}{y}, dz$, e però $dz = \frac{zdx\sqrt{zz - bb}}{by}$,

ma

ma $dz = dy$, dunque $dy = \frac{zdx \sqrt{zz - bb}}{by}$; e differenziando, presa dx costante,

$$ddy = \frac{2byzz - b^3 y - bz^3 + b^3 z \times dxdz}{bbyy \sqrt{zz - bb}}, \text{ mettendo } dz$$

in luogo di dy, e posto il valore di dz, averemo

$$ddy = \frac{2yz^3 - bbyz - z^4 + bbzz \times dx^2}{bby^3}, \text{ e finalmente}$$

surrogato il valore di $y = z \pm a$, sarà

$$ddy = \frac{z^4 \pm 2az^3 \mp abbz \times dx^2}{bb \times \overline{z \pm a}^3}.$$

La formola delle curve riferite al fuoco si è veduto, essere $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$, o pure $= \infty$; adunque, posti i valori di y, di dy, e di ddy, sarà

$$\frac{aabb \pm 3abbz \mp 2az^3 \times dx^2}{bb \times \overline{z \pm a}^2} = 0, \text{ o pure } = \infty. \text{ La sup-}$$

posizione della formola eguale al zero ci dà $abb \pm 3bbz \mp 2z^3 = 0$.

Sia in primo luogo $a = b$, e si voglia considerare il ramo superiore, sarà $z^3 - \frac{3aaz}{2} - \frac{a^3}{2} = 0$, ed i tre valori di z sono $z = -a$, $z = \frac{a - \sqrt{3aa}}{2}$, $z = \frac{a + \sqrt{3aa}}{2}$,

ma

ma è $y = z + a$, dunque sarà $y = 0$, $y = \frac{3a + \sqrt{3aa}}{2}$, $y = \frac{3a - \sqrt{3aa}}{2}$. Il terzo valore a nulla serve, perchè ci dà l'ordinata y minore di $2a$, dove non è curva; il secondo ci dà la ordinata y, che incontra la curva nel punto del flesso contrario, per esempio M; il primo ci viene somministrato anco considerando il ramo inferiore, e determina il punto P di regresso, ed infatti rispetto al ramo inferiore sarà $z^3 - \frac{3aaz}{2} + \frac{a^3}{2} = 0$, cioè i tre valori $z = a$, $z = -\frac{a \pm \sqrt{3aa}}{2}$; ma in questo caso $y = z - a$, dunque averemo $y = 0$, $y = -\frac{3a \pm \sqrt{3aa}}{2}$; i due ultimi valori a nulla servono, che ci danno y negativa, dove non è curva.

Riguardo agli altri due casi (*Fig.* 57. 58.) sarà $z^3 - \frac{3bbz}{2} \mp \frac{abb}{2} = 0$. Per avere le radici di questa equazione, pongo $zz = \frac{bp}{2}$, luogo alla parabola apolloniana, e fatta la sostituzione, nasce il secondo luogo all' iperbola $pz - 3bz = \pm ab$, cioè positivo l'omogeneo di comparazione rispetto al ramo superiore, e negativo rispetto all' inferiore. Fra gli asintoti PQ, MN normali in A, si descrivano le opposte iperbole (*Fig.* 77.) ne-

gli

gli angoli PAN, MAQ, ſe l'omogeneo di comparazione è poſitivo, e negli angoli PAM, NAQ, ſe è negativo; e ſuppoſta b maggiore di a, ſia $AB=b$, $BC=a$: paſſeranno l'iperbole per i punti C; e preſa $AM=3b$, dal punto M ſull'aſintoto MN ſieno le p, indi al vertice M, aſſe MN, parametro $\frac{b}{2}$ ſi deſcriva la parabola EMD dell'equazione $zz=\frac{bp}{2}$. Poichè preſa $p=Mb=2b$, la ordinata nella parabola è $z=b$ maggiore di a, cioè di (bc), paſſerà eſſa parabola al di fuori de' punti C, e taglierà l'iperbole DC, CT ne' punti D, T, I, da' quali condotte parallele all'aſintoto QP le rette DH, TV, IO, ſaranno eſſe le tre radici della z nell'equazione $z^3-\frac{3bbz}{2}-\frac{abb}{2}=0$, cioè riſpetto al ramo ſuperiore della concoide; ma $y=z+a$, dunque $DH+a$ ſarà la ordinata y, che incontra la curva nel fleſſo contrario, per eſempio M. (*Fig.* 58.) L'altre due radici VT, OI a nulla ſervono, perchè eſſendo negative, ad VT aggiunta a, la differenza, cioè y ſarà negativa, e ad OI aggiunta a, la differenza ſarà poſitiva, ma minore di a; ed alla y negativa, o minore di a non corriſponde in queſto caſo curva. Riſpetto al ramo inferiore della concoide, cioè nell'equazione $z^3-\frac{3bbz}{2}+\frac{abb}{2}=0$ le tre radici ſaranno OG, VK, HE, ma ſe dalla prima,

ma, e dalla terza si sottragga a per avere la y, la differenza sarà negativa, cioè y negativa, a cui non corrisponde curva, e però a nulla servono; se dalla seconda VK si sottragga a, la differenza LK sarà la ordinata y, che incontra la curva nel flesso contrario, per esempio, N.

Supposta b minore di a, la parabola passerà tra i punti c, C dell'iperbole GcK, ICT, e però i due valori negativi di z dell'equazione $z^3 - \frac{3bbz}{2} - \frac{abb}{2} = 0$, aggiungendo la a, daranno y minore di a, a cui non corrisponde curva; il terzo, aggiunta la a, darà la y, che incontrerà la curva nel flesso contrario, per esempio, M (*Fig.* 57.).

Rispetto al ramo inferiore, cioè all'equazione $z^3 - \frac{3bbz}{2} + \frac{abb}{2} = 0$, dalle due radici positive, che sono minori di b, sottratta a, e sottratta pure dalla radice negativa, averemo sempre y negativa maggiore di PK, a cui non corrisponde curva, e però il ramo inferiore della concoide quando b è minore di a, non â nè flessi contrarj, nè regressi.

La supposizione della formola $= \infty$ ci dà in tutti tre i casi $z = \mp a$, e però $y = 0$; nella *Fig.* 58. a nulla serve il valore $y = 0$, perchè non è in curva; nelle *Fig.* 56. 57.

ci

ci dà la tangente in P, che è assieme punto di regresso nella *Fig.* 56., ma non già nella *Fig.* 57.

ESEMPIO V.

104. Sia il circolo AED descritto col centro B (*Fig.* 78.), e sia una curva AFK tale, che condotto un qualunque raggio BFE, sia sempre il quadrato FE eguale al rettangolo del corrispondente arco AE in una data retta b, e si voglia il flesso contrario della curva AFK.

Si chiami l'arco $AE = z$, $BA = BE = a$, $BF = y$, ed $FG = dx$, fatta Be infinitamente prossima a BE, e descritto col centro B, raggio BF l'archetto FG; per la natura della curva sarà $bz = aa - 2ay + yy$, e però differenziando, $bdz = -2ady + 2ydy$, onde $dz = \frac{2ydy - 2ady}{b} = Ee$. Ma per i settori simili BEe, BFG, sarà BE, BF :: Ee, FG, cioè a, y :: $\frac{2ydy - 2ady}{b}$, dx, dunque $dx = \frac{2yydy - 2aydy}{ab}$, e differenziando, presa dx costante; $4ydy^2 + 2yyddy - 2ady^2 - 2ayddy = 0$, onde $yddy = \frac{ady^2 - 2ydy^2}{y - a}$.

 Nella

Nella formola generale delle curve riferite al fuoco $dx^2 + dy^2 - yddy$ si sostituiscano i valori di dx^2, e di $yddy$ dati per dy, ed averemo

$$\frac{4y^4dy^2 - 8ay^3dy^2 + 4aayydy^2 + aabbdy^2}{aabb} - \frac{ady^2 + ydy^2}{y - a},$$

cioè, riducendo al comun denominatore,

$$\frac{4y^5 - 12ay^4 + 12aay^3 - 4a^3yy + 3aabby - 2a^3bb}{aabb \times \overline{y - a}}$$ eguale al zero, o all'infinito. Costruita per tanto l'equazione, una delle radici ci darà il valore dell'ordinata y, che incontra la curva nel punto del flesso contrario.

CAPO

CAPO V.

Delle Evolute, e de' Raggi Osculatori.

105. Sia la Curva *BDF* (*Fig.* 79.) inviluppata dal filo *ABDF*, cioè essendo il filo fisso nel punto immobile *F* per un' estremità, s'intenda disteso sopra la curva *BDF*, e la porzione *AB* cada sulla tangente *AR* della curva nel punto *B*. Si muova il filo per l'estremità *A* sviluppando la curva, ma in maniera, che sia sempre teso, ed incapace di distrazione: il punto *A* descriverà con questo moto la curva *AHK*.

La curva *BDF* si chiama l'evoluta della curva *AHK*, come è stato detto anche di sopra al num. 16., e la curva *AHK* dicesi la generata dallo sviluppo della *BDF*, e le porzioni *AB*, *HD*, *KF* del filo si dicono raggi dell'evoluta, o raggi osculatori.

106. Poichè la lunghezza del filo *ABDF* è sempre la stessa, ne viene, che la differenza de' raggi osculatori *AB*, *HD* sarà eguale alla porzione *BD* della curva; siccome l'altra porzione *DF* è eguale alla differenza de' raggi *HD*, *KF*, e la curva intiera *BDF* eguale alla differenza de' raggi *AB*, *KF*; e se il raggio *AB* fosse nullo, cioè, se il punto *A* cadesse in *B*, sarebbe il raggio *HD* eguale alla porzione *BD*, ed il raggio *FK* a tutta la curva *BDF*.

107. Dalla generazione della curva AHK per lo ſviluppo del filo chiaramente ſi vede, che ciaſcun raggio HD, KF nelle ſue eſtremità D, F tocca l'evoluta BDF.

108. L'arco HK della curva AHK ſia infiniteſimo, ſarà pure infiniteſimo l'arco DF dell' evoluta, e poichè ô dimoſtrato nel corollario 4. del primo Teor. num. 6., che un qualunque archetto infiniteſimo di curva â le ſteſſe proprietà dell'arco di circolo; e nel Teorema 4. num. 15.; che prodotto il raggio HD, ſicchè incontri in S il raggio KF, ſono SH, SK diverſe tra loro ſolo per una quantità infiniteſima del terzo grado, ſi poſſono dunque prendere per eguali SH, SK; e però ſono eſſe perpendicolari alla curva AHK ne' punti H, K. Ma le due HD, HS differiſcono tra loro della DS infiniteſima del primo ordine, ed è HD finita, dunque ſi potranno aſſumere per eguali; quindi per determinare un qualunque punto D nella curva evoluta, vale a dire, per determinare la lunghezza di un qualunque raggio oſculatore HD, baſterà, che data di poſizione la perpendicolare HS della curva data AHK, (il che ſi â dal metodo delle tangenti) ſi determini il punto S, in cui eſſa ſi taglia con la perpendicolare infinitamente proſſima KS. Ciò faraſſi nel ſeguente modo.

109. Sia in primo luogo la curva $DABE$ (*Fig.* 80.) riferita agli aſſi; i due archetti infiniteſimi AB, BE, la perpendicolare BQ, e l'altra EQ, che la incontri nel ricer-

ricercato punto Q. Chiamate al solito $DH = x$, $HA = y$, e condotte AF, BG parallele a DM, e la corda $PABC$, che incontri ME prodotta in C, e condotta l'altra corda EBR; e col centro B, intervalli BE, BP, descritti gli archetti ES, PO, sarà $AF = dx$, $FB = dy$, $AB = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; ma per lo Corollario 2. del Teorema 5. num. 19. sono simili i settori QBE, BES; dunque averemo QB, $BE :: BE$, ES, cioè QB, $ds :: ds$, ES, (chiamando ds l'elemento della curva) e però $QB = \frac{ds^2}{ES}$.

Ora poichè l'archetto PO si può prendere per il suo seno retto, (Corollario 1. del Teor. 3. num. 9.) saranno simili i triangoli RPO, BEG, e però BE, $EG :: RP$, PO, cioè ds, $dy :: RP$, $PO = \frac{RP\,dy}{ds}$; ma sono pure simili i settori BPO, BES, e però sarà BP, $PO :: BE$, ES, cioè $\frac{yds}{dy}$, $\frac{RP\,dy}{ds} :: ds$, $ES = \frac{RP \times dy^2}{yds}$, e finalmente $QB = \frac{yds^3}{RP \times dy^2}$, formola generale de' raggi osculatori, in cui nulla altro rimane da farsi, che sostituire il valore della RP, differenza della $DP = \frac{ydx}{dy} - x$, secondo la diversa ipotesi della flussione prima, che si prende per costante.

Se nessuna flussione prima si assuma per costante, sarà $RP = \frac{ydyddx - ydxddy}{dy^2}$, e però $QB = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$

Se

Se ſi aſſuma coſtante dx, ſarà $RP = -\frac{ydxddy}{dy^2}$;

e però $QB = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$:

Se ſi aſſuma coſtante dy, ſarà $RP = \frac{yddx}{dy}$, e però

$QB = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$.

Se ſi aſſuma coſtante ds, cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ſarà $dxddx + dyddy = 0$, e $-ddy = \frac{dxddx}{dy}$, quindi $RP = \frac{yddx \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy^3}$, e però $QB = \frac{dy}{ddx}\sqrt{dx^2 + dy^2}$, o pure ſurrogato il valore di ddx, $QB = \frac{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-ddy}$. Adunque nell'eſpreſſione di $QB = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$, in cui neſſuna fluſſione è preſa coſtante, baſterà cancellare il termine ddx nella ſuppoſizione di dx coſtante; cancellare il termine ddy nella ſuppoſizione di dy coſtante; e porre in luogo di $-ddy$ il valore $\frac{dxddx}{dy}$ nella ſuppoſizione di ds coſtante.

110. Può la curva eſſere riferita ad un diametro, vale a dire con le coordinate tra loro in angolo obbli-

bliquo. Sia DV l'assissa $= x$, $VK = dx$, VA l'ordinata $= y$, ed il rimanente, come sopra. Poichè è noto l'angolo DKB, sarà noto l'angolo BNF, e nota la ragione de' lati tra loro nel triangolo BNF, quindi essendo $NB = dy$, sarà data NF, ed FB, ed in conseguenza AB, o sia ds. Ma il triangolo RPO è simile al triangolo ABF, poichè gli angoli in O, ed F sono retti, e l'angolo ORP non è diverso dall'angolo FAB, che per l'angolo infinitesimo RBP; adunque saranno date RP, PO, ed indi ES, e finalmente QB.

111. Dall' estremità del raggio osculatore BQ si tiri QT parallela all'asse DM, che incontra in T l'ordinata BI prodotta, la retta BT chiamasi *Sottosculatrice*, o *Co-raggio*. Dato il raggio BQ, è pure istessamente sempre dato il co-raggio BT, perchè dal metodo delle tangenti è data la normale Bm della curva, e però dalla similitudine de' triangoli BmI, BQT sarà data BT.

Ma se si voglia l'espressione del co-raggio independentemente dal raggio, si chiami $BT = z$. Il triangolo BTQ è simile al triangolo BGC, o sia BAF, perchè essendo retti i due angoli TBG, QBC, tolto il comune QBG, rimarranno eguali TBQ, CBG, e sono retti T, e G; adunque sarà $dx, ds :: z, BQ = \frac{z\,ds}{dx} = \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$.

Ma per lo Teorema 4. num. 15., BQ è eguale ad EQ, perchè non differiscono tra di loro, se non per una

quan-

quantità infinitesima del terzo grado, adunque sarà nulla la differenza di QB, e però differenziando, senza assumere flussione costante,

$$\frac{dxdz \times \overline{dx^2 + dy^2} + zdx^2 ddx + zdxdyddy - zddx \times \overline{dx^2 + dy^2}}{dx^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0$$

ma $dz = dy$, perchè è la stessa la differenza di TB, e di IB; dunque $z = \frac{dx \times \overline{dx^2 + dy^2}}{dyddx - dxddy} = BT$, formola del co-raggio, in cui nessuna flussione è stata assunta costante. Se sia dx costante, il termine $dyddx$ sarà nullo, e però la formola in questa supposizione sarà $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = BT$.

Se sia costante dy, sarà nullo il termine $-dxddy$, e però la formola in questa supposizione sarà $\frac{dx \times \overline{dx^2 + dy^2}}{dyddx} = BT$.

Se sia costante l'elemento della curva, sarà $-ddy = \frac{dxddx}{dy}$, e però la formola in questa supposizione sarà $\frac{dxdy}{ddx} = BT$, surrogato il valore di ddy; o pure $\frac{dx^2}{-ddy} = BT$, surrogato il valore di ddx.

Dato il co-raggio, per la similitudine de' triangoli BmI, BQT, sarà similmente dato il raggio QB.

112. Se le coordinate saranno tra loro in angolo obbliquo, nell' analogìa dx, $ds :: z$, BQ in luogo delle

delle dx, e ds, basterà porre i rispettivi valori, che in questo caso convengono alle AF, AB, e fare il rimanente, come sopra, e si averà la formola del coraggio BT nel caso, che le coordinate sieno in angolo obbliquo.

113. In diverse altre maniere si può avere la stessa formola del raggio osculatore. Col centro Q, intervallo Qm si descriva l'archetto (mn). Assumendo l'archetto infinitesimo (mn) per la tangente in n, saranno simili i due triangoli BCG, (mnq), e però BC, BG :: (mq), (mn); cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, dx :: (mq), $(mn) = \frac{(mq) \times dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, ma (mq) è la differenza di Dm, cioè della sottonormale Im con l'assissa DI, o sia DH, cioè di $x + \frac{ydy}{dx}$; adunque differenziando nell' ipotesi di nessuna flussione costante, sarà

$(mq) = \frac{dx^3 + ydxddy + dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$, adunque

$(mn) = \frac{dx^3 + ydxddy + dxdy^2 - ydyddx}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, ma per i settori simili Qmn, QBE, sarà $BE - (mn)$, BE :: Bm $\left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\right)$, QB, cioè sostituiti i valori analitici,

$QB = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$, la qual formola modificata secondo

la ſuppoſizione di una fluſſione coſtante ci darà l' eſpreſſione del raggio QB, che a tale ſuppoſizione corriſponde.

114. In altro modo ancora.

Si produca EM in t, BG in L. Poichè il triangolo EGL è ſimile al triangolo BIm, eſſendo gl' angoli GEL, IBm diverſi fra loro del ſolo angolo infiniteſimo BQE, ſarà $GL = \frac{dy^2}{dx}$, e però $BL = \frac{dx^2 + dy^2}{dx}$;

ma ſi è veduto, eſſere $(mq) = \frac{dx^3 + ydxddy + dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$,

ed i triangoli ſimili QBL, Qmq ci danno $BL - (mq)$, $BL :: Bm$, BQ; dunque ſoſtituiti i valori analitici,

averemo $BQ = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$.

115. Prendanſi ora le curve riferite al fuoco: e però ſia (*Fig.* 81.) la curva BEG, il fuoco A; e preſi due archetti infiniteſimi BE, EG, e condotte le ordinate AB, AE, AG, col centro A ſi deſcrivano gl'archetti BC, EF, ed alle corde GE, EB prodotte ſieno perpendicolari AI, AD, e finalmente la corda DE prodotta incontri in L l' ordinata AG, e col centro E ſi deſcriva l'archetto GR. Sia $AB = y$, $CE = dy$, $BC = dx$, $AD = p$. Col centro A deſcritto l'archetto DH, ſarà $HI = dp$, ma HM è quantità infiniteſima del

del secondo grado; (Teor. 3. num. 8.) dunque si potranno prendere per eguali HI, IM, e però sarà $MI = dp$. La similitudine de' triangoli EBC, EAD ci dà $ED = \frac{ydy}{ds} = EI$, per esser diversa solo per un' infinitesimo, ed assumendo l'archetto GR per la sua tangente, sono simili i triangoli EIM, EGR, quindi $GR = \frac{dpds^2}{ydy}$; ma condotte EQ, QG normali alla curva ne' punti E, G, sono simili i settori QEG, EGR, dunque $QE = \frac{ydy}{dp}$. I triangoli simili EBC, EAD ci danno $p = \frac{ydx}{ds} = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; e però differenziando, senza prendere costante alcuna,

$$dp = \frac{\overline{yddx + dxdy} \times \overline{dx^2 + dy^2} - \overline{dxddx - dyddy} \times ydx}{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}},$$

cioè $dp = \frac{dx^3 dy + ydy^2 ddx + dxdy^3 - ydxdyddy}{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}$, onde sostituito questo valore in luogo di dp nell' espressione di QE, sarà $QE = \frac{y \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + ydyddx + dxdy^2 - ydxddy}$, formola generale del raggio osculatore per le curve rife-

rite al fuoco, presa nessuna flussione costante.

Se si voglia costante dx, preso il valore di dp in questa ipotesi, e sostituito; o pure senz' altro cancellato nella formola generale il termine $ydyddx$, sarà

$$QE = \frac{y \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}.$$

Se si voglia costante dy, cancellato nella formola generale il termine $-ydxddy$, sarà

$$QE = \frac{y \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx}.$$

E finalmente presa per costante ds, cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, averemo $ddx = -\frac{dyddy}{dx}$, e surrogato in luogo di ddx questo valore nella formola generale, sarà

$QE = \frac{ydx \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2 - yddy}$, o pure surrogato il valore di ddy,

$$QE = \frac{ydy \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dxdy + yddx}.$$

116. Se in ciascheduna di queste formole si supporrà la y infinita, svaniranno tutti que' termini, ne' quali essa non si ritrova, e le formole saranno le stesse delle ritrovate per le curve riferite agli assi, il che deve appunto succedere, poichè se la y è infinita, il punto A sarà infinitamente lontano, e però parallele le ordinate.

117.

117. In altra maniera. All' archetto EG infinitesimo sia tangente ER nel punto E, (*Fig.* 82.) e sieno QE, QG due raggi osculatori, e si produca QG in R. Dal fuoco A si tiri AN normale a QG, ed AK normale a QE, e sia $EK = t$, sarà $KM = dt$. Poichè il triangolo AKM è simile al triangolo QNM, e questo è simile al triangolo QER, sarà QE, ER :: AK, KM, cioè QE, ER :: AK, dt; ma per i triangoli ELC, o sia EGC, EAK simili, è $AK = \frac{ydy}{ds}$, ed ER si può assumere per EG, dunque sarà QE, ds :: $\frac{ydy}{ds}$, dt, e però $QE = \frac{ydy}{dt}$, ma $EK = t = \frac{ydx}{ds}$, dunque fatto il rimanente, come sopra, cioè preso differenziando il valore di dt, e sostituito nell' espressione di QE, si averanno le stesse formole.

118. Fatta QP normale ad EA prodotta in P, saranno simili i triangoli EAK, EQP, e però EA, EK :: EQ, EP; ma si è veduto, essere $EQ = \frac{ydy}{dt}$, dunque y, t :: $\frac{ydy}{dt}$, $EP = \frac{tdy}{dt}$, e surrogato in luogo di t il valore $\frac{ydx}{ds}$, ed in luogo di dt il differenziale

$$\frac{dx^3 dy + ydy^2 ddx + dxdy^3 - ydxdyddy}{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}},$$ senza assumere

flus-

flussione costante, sarà $EP =$

$$\frac{ydxds^2}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy} = \frac{ydx^3 + ydxdy^2}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy},$$

formola generale del co-raggio, in cui nessuna flussione è presa costante, dalla quale modificata si ricavano le altre, che alle supposizioni di differenziale costante corrispondono, e se in queste si supporrà la y infinita, cioè, se si cancelleranno que' termini, ne' quali essa non trovasi, si averanno le stesse formole, che si sono ritrovate per le curve riferite agl'assi.

119. Poichè, qualunque siasi la curva, si ritrova una sola espressione del raggio osculatore, e del co-raggio sì nelle curve riferite agl'assi, come in quelle riferite al fuoco, ne viene, che qualunque curva non potrà avere, che una sola evoluta.

120. Data adunque, per mezzo di un' equazione qualunque, la curva, di cui si vuole il raggio osculatore, o co-raggio; converrà differenziare l'equazione a fine di avere i valori di dy, dy^2, e ddy dati per dx, o di dx ec. dati per dy, e sostituirli nelle ritrovate formole, con che si averà l'espressione in termini finiti, e affatto liberi dai differenziali, del raggio osculatore, o co-raggio della proposta curva.

121. Se il valore del raggio osculatore, o del co-raggio sarà positivo, dovranno essi prendersi dalla parte

te dell'affe *D M*, (*Fig.* 80.) o del fuoco *A* (*Fig.* 81.), come ô fin'ora fuppofto, e la curva farà concava a queft'affe, o fuoco; ma fe farà negativo, dovranno effi prenderfi dalla parte oppofta, ed in quefto cafo la curva farà convessa. Da ciò ne fegue, che nel punto del fleffo contrario, o regreffo, fe la curva ne â, il co-raggio dovrà farfi da pofitivo negativo, e due raggi ofculatori infinitamente proffimi dall'effere convergenti pafferanno ad effere divergenti. Ma ciò non può effere, fe effi non divengano prima paralleli, vale a dire infinito il raggio dell'evoluta in quel punto, o pure fe effi non cadano prima l'uno fopra dell'altro, e così fi faccia nullo il raggio dell'evoluta. Egli è affai chiaro, che quando l'evoluta fia tale, che i raggi vadano fempre crefcendo accoftandofi al punto del fleffo contrario, o regreffo *B*, (*Fig.* 83., *e* 84.) per paffare ad effere da convergenti divegenti, dovranno farfi prima paralleli, effendo *A D*, *FE* l'elvoluta della curva *A B F*. Ma fe l'evoluta della curva *A B F* (*Fig.* 85., *e* 86) farà *D B E*, fviluppandofi il filo dal punto *B*, e andando verfo *A* rifpetto alla porzione *B A* della curva, ed andando verfo *F* rifpetto alla porzione *B F*, poichè è fempre il raggio minore, quanto più è vicino al punto *B*; converrà, che fi faccia nullo prima di paffare dall'effer pofitivo ad effer negativo.

ESEM-

ESEMPIO I.

122. La curva AB (*Fig.* 87.) sia la parabola apolloniana dell'equazione $ax = yy$, di cui si voglia il raggio osculatore ad un qualunque punto B. Differenziando sarà $adx = 2ydy$, e differenziando di nuovo, presa dx costante, se così piace, $2dy^2 + 2yddy = 0$, ma $dy = \frac{adx}{2y}$, dunque $ddy = -\frac{aadx^2}{4y^3}$. Sostituiti per tanto questi valori nella formola del co-raggio $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, sarà $\frac{4y^3 + aay}{aa} = BE$, o pure, posto in luogo di y il valore dato dall'equazione della curva, $BE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}$.

Dal punto B si tiri la tangente BT, che incontra l'asse in T, e dal punto T si conduca TE parallela alla normale BM; incontrerà essa la BP prodotta nel ricercato punto E. Imperciocchè essendo l'angolo BTE retto, sarà BP, $PT :: PT$, PE, cioè per la proprietà della parabola, $\sqrt{ax}$, $2x :: 2x$, $PE = \frac{4xx}{\sqrt{ax}} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$; adunque $BP + PE$, cioè $BE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}$.

De-

Determinata BE, si conduca EQ parallela all' asse AP, la normale BQ prodotta incontrerà EQ nel punto Q, che sarà all'evoluta.

O pure, a cagione de' triangoli simili BPM, BEQ, sarà BP, $PM :: BE$, EQ; ma per la proprietà della parabola è $PM = \frac{1}{2}a$, dunque $\sqrt{ax}$, $\frac{1}{2}a :: \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}$, $EQ = 2x + \frac{a}{2} = PK$; dunque $MK = 2x$. Presa per tanto MK doppia di AP, o sia $PK = TM$, e condotta KQ parallela a PB, incontrerà essa la normale BM prodotta nel punto Q, che sarà all'evoluta. E poichè BP, $BM :: BE$, BQ, e $BM = \frac{\sqrt{4ax + aa}}{2}$, sarà

$$\sqrt{ax}, \frac{\sqrt{4ax + aa}}{2} :: \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}, BQ = \frac{(4ax + aa)^{\frac{3}{2}}}{2aa},$$

raggio osculatore.

Prendo la formola $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ del raggio osculatore, fatte le sostituzioni, sarà $QB = \frac{(4yy + aa)^{\frac{3}{2}}}{2aa} = \frac{(4ax + aa)^{\frac{3}{2}}}{2aa}$, come prima.

Passando alle seconde differenze dell' equazio-

ne

ne $ax = yy$, ſenza prendere alcuna fluſſione coſtante; poichè $adx = 2ydy$, ſarà $addx = 2yddy + 2dy^2$, e $ddy = \frac{addx - 2dy^2}{2y}$. Quindi preſa la formola del raggio oſculatore $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$, che a queſto caſo conviene, e fatta la ſoſtituzione del valore di ddy, ſarà $QB = \frac{2y \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{2ydyddx - adxddx + 2dxdy^2}$, e finalmente poſti i valori di y, e di dy, $QB = \frac{\overline{4ax + aa}^{\frac{3}{2}}}{2aa}$, come ſopra.

Si troverà la ſteſſa coſa nell' altre ſuppoſizioni di dy, o di ds coſtanti, il che ommetto di fare per brevità.

Se ſi voleſſe il raggio oſculatore ad un determinato punto della curva, baſterà ſoſtituire nell'eſpreſſione finita già ritrovata del raggio oſculatore per un qualunque punto il valore della x, che a tale determinato punto conviene. Così ſe ſi voglia il raggio oſculatore nel vertice A, o ſia il punto N, in cui l'aſſe AN della parabola tocca l'evoluta NQ: poichè nel vertice A è $x = 0$, cancellato il termine $4ax$ nell' eſpreſſione $\frac{\overline{4ax + aa}^{\frac{3}{2}}}{2aa}$ del raggio oſculatore, averemo $AN = \frac{a}{2}$, il che non

può

può eſſere altrimenti, eſſendo in queſto caſo il raggio AN lo ſteſſo, che la ſottonormale, la quale nella parabola ſi ſa eſſere ſempre la metà del parametro.

123. Sarà ora facile il ritrovare l'equazione alla Carteſiana dell'evoluta NQ, o ſia la relazione delle ordinate NK, KQ nel ſeguente modo.

Si chiami $NK = u$, $KQ = t$. Poichè $KQ = PE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, averemo l'equazione $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, ma $AK = AP + PK = 3x + \frac{1}{2}a$, ed $AN = \frac{1}{2}a$; dunque $NK = 3x = u$, ed $x = \frac{u}{3}$, e però poſto in luogo di x queſto valore nell'equazione $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, averemo $t = \frac{4u\sqrt{\frac{au}{3}}}{3a}$, e quadrando, $27att = 16u^3$, equazione alla ſeconda parabola cubica del parametro $= \frac{27a}{16}$, la quale eſprime la relazione delle coordinate NK, KQ, ed è l'evoluta della propoſta parabola apolloniana.

Egli è manifeſto, che la ſeconda parabola cubica intiera ſarà l'evoluta dell'intiera parabola apolloniana, cioè che (*Fig.* 88.) il ramo NQ ſarà l'evoluta della parte ſuperiore AB, ed il ramo Nq della inferiore Ab; e che i due rami Nq, NQ ſi voltano le conveſſità, ed ânno un regreſſo in N.

124. E' pure manifeſto, che ſe le curve propoſte

sono algebraiche, saranno pure algebraiche le loro evolute, e si potrà sempre avere l'equazione in termini finiti esprimenti la relazione delle coordinate, e che inoltre esse evolute saranno rettificabili, cioè si potranno ritrovare delle rette linee eguali ad una qualunque porzione delle medesime, per esempio NQ. Imperciocchè, se la proposta curva AB è algebraica, si avranno sempre in termini finiti i raggi osculatori BQ, AN, e da BQ sottratto AN, il residuo sarà l'arco NQ.

ESEMPIO II.

125. Sia la curva MBM (*Fig.* 89.) l'iperbola fra gli asintoti dell' equazione $aa = xy$. Differenziando, $xdy + ydx = 0$, e di nuovo differenziando, presa dx costante, $ddy = -\frac{2dxdy}{x}$. Sostituiti i valori di dy, e ddy nella formola $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ del co-raggio, averemo $BE = \frac{xx + yy}{-2y}$, valore negativo. Se adunque sia $AP = x$, $PB = y$, nella prodotta AB presa $BN = \frac{1}{2} BA = \frac{\sqrt{xx + yy}}{2}$, ed alzata normale NE, che incontri la ordinata BP prodotta in E, sarà BE il co-raggio, che si cerca; imperciocchè, per la similitudine de' triangoli BPA, BNE,

sarà

farà BP, BA :: BN, BE, cioè y, $\sqrt{xx+yy}$ :: $\frac{\sqrt{xx+yy}}{2}$, $BE = \frac{xx+yy}{2y}$, e perchè si prende dalla parte de' negativi, $BE = \frac{xx+yy}{-2y}$. Quindi condotta EQ parallela ad AP, e prodotta in Q la normale FB alla curva nel punto B, sarà BQ il raggio osculatore, ed il punto Q nell' evoluta.

Per determinare il raggio osculatore nel vertice D dell' iperbola, si ponga $x = AH = a$, e però $y = HD = a$, adunque il co-raggio $\frac{xx+yy}{-2y}$ nel vertice D sarà $= -a$, ed il raggio $= -\sqrt{2aa}$.

Per poco, che si rifletta alla figura della curva MBM, si vede, che l'evoluta averà due rami con un punto di regresso in L, in cui il raggio DL converrà, che sia il minimo di tutti i raggi BQ; e però differenziando la formola de' raggi osculatori $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, la differenza dovrà essere nulla, o infinita; cioè, supposta dx costante,

$$\frac{-3dxdyddy^2\sqrt{dx^2+dy^2} + dxdddy \times \overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy^2} = 0,$$

o pure = all'infinito, e dividendo per $\sqrt{dx^2+dy^2}$, e mol-

moltiplicando per $dxddy^2$, sarà $dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dyddy^2 = 0$, o pure $= \infty$. Ma per l'equazione della curva, si â $dy = -\frac{aadx}{xx}$, $ddy = \frac{2aadx^2}{x^3}$, $dddy = -\frac{6aadx^3}{x^4}$; dunque fatte le sostituzioni, e supposta la detta quantità eguale a zero, averemo $x = a = AH$; vale a dire, che il regresso sarà nel raggio osculatore al vertice D della curva; ma si è veduto, essere esso raggio $= -\sqrt{2aa}$, sarà dunque $DL = -\sqrt{2aa} = DA$.

Nella formola de' raggi osculatori, surrogati i valori di dy, e di ddy, averemo $BQ = \frac{\overline{xx + yy}^{\frac{3}{2}}}{-2xy} = \frac{\overline{xx + yy}^{\frac{3}{2}}}{-2aa}$, e però differenziando, a fine di avere il minimo raggio, cioè il punto di regresso L, sarà $\overline{3xdx + 3ydy}\sqrt{xx + yy} = 0$, e posto in luogo di dy il suo valore, sarà $\overline{3xxdx - 3yydx}\sqrt{xx + yy} = 0$, cioè $x = y = a$, e sostituito questo valore nell' espressione del raggio osculatore, sarà esso $= -\sqrt{2aa} = DL$, come sopra.

In altro modo ancora si può costruire il raggio BQ. Poichè $ddy = -\frac{2dxdy}{x}$, sostituiti in luogo di x, e di dx i valori dati per y, sarà $ddy = \frac{2dy^2}{y}$, e però il co-raggio

gio $BE = \frac{ydx^2 + ydy^2}{-2dy^2}$, e per i triangoli ſimili BPF, BEQ, averemo $EQ = -\frac{ydy}{2dx} - \frac{ydx}{2dy}$. Si conduca ora al punto B la tangente BT, e dal punto T la TS normale a BT, o ſia parallela a BQ, e ſi prenda $BE = \frac{1}{2} BS$, o $PK = \frac{1}{2} FT$; ſe ſi farà EQ parallela alla AT, o KQ perpendicolare, eſſe incontreranno la normale BQ nel punto Q dell' evoluta, poichè ſarà $BS = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dy^2}$, dunque $BE = \frac{ydx^2 + ydy^2}{-2dy^2}$; ſarà ancora $FP + PT = FT = -\frac{ydy}{dx} - \frac{ydx}{dy}$, dunque $EQ = -\frac{ydy}{2dx} - \frac{ydx}{2dy}$.

Se l'equazione ſarà $y^m = x$, la quale eſprime tutte le parabole all' infinito, quando ſia m numero poſitivo, ed in conſeguenza anche la parabola dell' eſempio primo; ed eſprime tutte le iperbole fra gli aſintoti all' infinito, quando ſia m negativo, e però anche quella di queſto eſempio: differenziando averemo $my^{m-1}dy = dx$, e di nuovo differenziando, ſuppoſta dx coſtante, $\overline{mm-m} \times y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = 0$, e dividendo per my^{m-1}, ſarà $-ddy = \overline{m-1} \times \frac{dy^2}{y}$. Preſa pertanto

la

la formola $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$ del co-raggio, e fatta la sostituzione del valore di ddy, si averà $BE = \frac{ydx^2+ydy^2}{\overline{m-1}\times dy^2}$, e però EQ, o $PK = \frac{ydx}{\overline{m-1}\times dy} + \frac{ydy}{\overline{m-1}\times dx}$.

Dal punto T, in cui (*Fig.* 87., *e* 89.) la tangente BT incontra l'asse AP, si tiri istessamente TS parallela alla normale BQ alla curva, che incontra in S la ordinata BP prodotta, indi si prenda $BE = \frac{BS}{m-1}$ dalla parte dei negativi, se m sia numero negativo, come nelle iperbole le quali sono all'asse AP, cioè all'asintoto convesse (*Fig.* 89.); si prenda BE dalla parte dei positivi, se m sia numero positivo, e maggiore dell'unità, come nelle parabole (*Fig.* 87.) concave all'asse AP, e dalla parte dei negativi, se m positivo sia minore dell'unità, nel qual caso le parabole sono convesse all'asse AP.

Per determinare il punto, in cui l'asse della parabola tocca l'evoluta, prendo la formola de' raggi osculatori $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, da cui, sostituiti i valori di $dx = my^{m-1}dy$, e di $-ddy = \frac{\overline{m-1}\times dy^2}{y}$, averemo

mo $BQ = \frac{\overline{mmy^{2m-2}+1}^{\frac{3}{2}}}{m \times \overline{m-1} \times y^{m-2}}$, intendendo , che l'unità supplisca per la legge degl' omogenei ; quindi supposta m maggiore dell'unità , acciò sieno concave le parabole all'asse AP , se sarà m minore di 2 , la y del denominatore passerà ad essere un moltiplicatore del numeratore , e però fatta $y = 0$, come richiede il caso , che si cerca , sarà $BQ = 0$, cioè l'asse toccherà l'evoluta nel vertice A della parabola , come sarebbe per esempio la seconda parabola cubica $axx = y^3$ (*Fig.* 70.) .

Che se m è maggiore di 2 , la y del denominatore sarà elevata a potestà positiva , e però fatta $y = 0$, sarà BQ infinita , vale a dire che l'asse della parabola sarà asintoto dell'evoluta ; come la prima parabola cubica AB , (*Fig.* 90.) il di cui asse AP è asintoto dell' evoluta LQ .

L'evoluta CLQ della semi-parabola cubica ABM dell'equazione $aax = y^3$ â un punto di regresso L , e però due rami LQ, LC; sviluppando il ramo LQ, si genera la porzione BA ; sviluppando il ramo LC , la porzione infinita BM .

Per determinare il flesso contrario L , prendo il valore del raggio osculatore , che in questa curva è $= \frac{\overline{9y^4 + a^4}^{\frac{3}{2}}}{6a^4 y}$, il quale deve essere un minimo ,

e però differenziando

$$\frac{3 \times 18a^4y^4dy \times \overline{9y^4+a^4}^{-\frac{1}{2}} - a^4dy \times \overline{9y^4+a^4}^{\frac{3}{2}}}{6a^8yy} = 0,$$

cioè $45y^4 - a^4 = 0$, quindi $y = \sqrt[4]{\frac{a^4}{45}}$, e surrogato questo valore in luogo di y nell'equazione $aax = y^3$, averemo $x = \sqrt[4]{\frac{a^4}{91125}}$. Presa adunque $AP = \sqrt[4]{\frac{a^4}{91125}}$, e condotta l'ordinata PB, il punto di regresso L sarà nella normale al punto B della curva; e nell'espressione del raggio osculatore posto $\sqrt[4]{\frac{a^4}{45}}$ in luogo di y, averemo il valore di BL.

In altro modo. Differenziando l'equazione $aax = y^3$, o sia $y = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$, sarà $dy = \frac{1}{3} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} dx$, $ddy = -\frac{2}{9} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{5}{3}} dx^2$, $dddy = \frac{10}{27} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{8}{3}} dx^3$, posta dx costante; quindi, presa la formola
$dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dyddy^2 = 0$, e sostituiti i valori, si averà $AP = \sqrt[4]{\frac{a^4}{91125}}$.

ESEM-

ESEMPIO III.

126. Sia la curva ABD (*Fig.* 91.) un' ellissi, o un' iperbola, il di cui asse $AH = a$, ed il parametro $AF = b$, $AP = x$, $PB = y$, e l'equazione $y = \sqrt{\frac{abx \mp bxx}{a}}$. Differenziando, sarà $dy = \frac{abdx \mp 2bxdx}{2\sqrt{aabx \mp abxx}}$, e $ddy = \frac{-a^3bbdx^2}{4 \times \overline{aabx \mp abxx}^{\frac{3}{2}}}$, presa dx per costante. Fatte le sostituzioni nella formola $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ del raggio osculatore, sarà $BGQ = \frac{\overline{4aabx \mp 4abxx + aabb \mp 4abbx + 4bbxx}^{\frac{3}{2}}}{2a^3bb}$. Ma la normale BG si troverà essere $= \frac{\overline{4aabx \mp 4abxx + aabb \mp 4abbx + 4bbxx}^{\frac{1}{2}}}{2a}$, dunque sarà il raggio $BGQ = \frac{4\overline{BG}^3}{bb}$; adunque preso il parametro b per primo termine, la normale BG per secondo, e continovata la serie geometrica, il quadruplo

del

del quarto termine sarà il raggio osculatore BQ.
Fatta $x = 0$ nella espressione del raggio osculatore, sarà $BGQ = AM = \frac{b}{2}$, e fatta $x = AO = \frac{1}{2}a$, si avrà nell' ellissi $BGQ = DOQ = \frac{a\sqrt{ab}}{2b}$, cioè eguale alla metà del parametro dell' asse conjugato, ed in Q vi sarà un regresso, e l' evoluta della porzione $AD = DH$ sarà MQ; della porzione DH sarà RQ; ma nell' iperbola il raggio si estende all' infinito.

Se nell' ellissi si faccia $a = b$, il raggio osculatore BGQ sarà $= \frac{a}{2}$, qualunque siasi il punto B; dunque i raggi tutti eguali tra loro, e l' evoluta un punto, cioè a dire l' ellissi, che in questo caso diviene un circolo, â per evoluta il suo centro.

ESEMPIO IV.

127. Sia la curva ABD (*Fig.* 92.) la logaritmica ordinaria, la di cui equazione è $\frac{ady}{y} = dx$.

Differenziando, presa dx costante, sarà $ddy = \frac{dxdy}{a} = \frac{ydx^2}{aa}$, posto il valore di dy. Fatte le sostituzioni

ni nella formola $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ del co-raggio, averemo $BE = \frac{-aa - yy}{y}$, e perchè nella logaritmica si trova, essere la sottonormale $PH = \frac{yy}{a}$, sarà $EQ = -a - \frac{yy}{a}$. Presa adunque $PK = TH$, ed alzata in angolo retto KQ, incontrerà essa la normale HBQ nel ricercato punto Q dell'evoluta.

Se si voglia determinare il punto della massima curvatura nella logaritmica, cioè il punto del minimo raggio osculatore, fatte le sostituzioni nella formola $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ del raggio osculatore, sarà $\frac{\overline{aa + yy}^{\frac{3}{2}}}{-ay}$, e differenziando sarà

$$\frac{-3ayydy \times \overline{aa + yy}^{\frac{1}{2}} + ady \times \overline{aa + yy}^{\frac{3}{2}}}{aayy} = 0\text{, e però}$$

$PB = y = \sqrt{\frac{aa}{2}}$.

O pure, presa la formola del num. 125. $dx^2dddy + dy^2dddy - 3dyddy^2 = 0$, e fatte le sostituzioni di $dy = \frac{ydx}{a}$, di $ddy = \frac{ydx^2}{aa}$, di $dddy = \frac{ydx^3}{a^3}$, troveremo istessamente $PB = y = \sqrt{\frac{aa}{2}}$.

ESEM-

ESEMPIO V.

128. Sia ABD (*Fig.* 93.) la logaritmica ſpirale, la di cui proprietà è, che condotta ad un qualunque punto B la tangente BT, e dal polo A la ordinata AB, l'angolo ABT ſia ſempre lo ſteſſo, e però fatta AM infinitamente proſſima ad AB, ſarà coſtante la ragione di MR ad RB, quindi poſta $AB = y$, l'archetto $BR = dx$, l'equazione ſarà $adx = bdy$, e differenziando, fatta dx coſtante, $ddy = 0$. Preſa pertanto la formola del co-raggio num. 118.

$$\frac{ydx^3 + ydxdy^2}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}$$

, per le curve riferite al fuoco, la quale regolata nell'ipoteſi di dx coſtante è $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$, e cancellato in queſta il termine $yddy$, perchè la curva ci dà $ddy = 0$, e fatta la ſoſtituzione del valore di dx, o di dy, ovvero diviſo il numeratore, e denominatore per $dx^2 + dy^2$, ſarà il co-raggio $BA = y$.

Adunque, condotta AC normale ad AB, incontrerà eſſa la perpendicolare BC nel ricercato punto C

dell'

dell'evoluta, e perchè la sottonormale $AC = \frac{ay}{b}$, sarà $BC = \frac{y\sqrt{aa+bb}}{b}$.

Condotta la tangente BT alla curva nel punto B, saranno simili i triangoli TCB, CBA, e però eguali gl'angoli TBA, ACB; ma l'angolo TBA è sempre costante, dunque lo sarà ancora l'angolo ACB; e però l'evoluta AC sarà la stessa logaritmica spirale ABD, ma inversamente posta.

ESEMPIO VI.

129. Sia ABD (*Fig.* 93.) la spirale iperbolica, la di cui proprietà è, che la sottotangente sia costante.

Fatte dunque le stesse cose dell'Esempio antecedente, l'equazione della curva sarà $\frac{ydx}{dy} = a$, o sia $ydx = ady$; quindi differenziando, posta dx costante, $ddy = \frac{dxdy}{a}$. Presa per tanto la formola del co-raggio, che all'ipotesi di dx costante corrisponde, cioè $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$, indi sostituito in luogo di ddy il valo-

re

re $\frac{dxdy}{a}$, ed in luogo di dy il valore $\frac{ydx}{a}$ dato dall' equazione, farà il co-raggio $= \frac{y \times \sqrt{aa + yy}}{aa}$.

Ma poichè la fottotangente AT è $= a$, e la fottonormale $AC = \frac{yy}{a}$, farà $TC = \frac{aa + yy}{a}$; dunque la quarta proporzionale della fottangente TA, e della TC, e dell'ordinata AB ci determina il co-raggio. Quindi dal punto C condotta parallella alla tangente BT la CQ, che taglia in Q la ordinata BA prodotta, farà BQ il ricercato co-raggio.

Poichè per i triangoli fimili BAT, CAQ, fi averà CA, AQ :: TA, AB, e permutando CA, TA :: AQ, AB, e componendo TC, AT :: QB, AB, ed invertendo TA, TC :: BA, BQ; il che ec.

ESEMPIO VI.

130. Sia il fettore di circolo ADN, (*Fig.* 94.) e condotto dal centro A un raggio qualunque ABP, fi faccia ND, NP :: $\overline{AP}^m$, $\overline{AB}^m$, il punto B farà nella curva ABD, che è una delle fpirali all'infinito, la di cui equazione, fatto $NPD = b$, $NP = z$, il raggio

gio $AP = a$, $AB = y$, sarà $y^m = \frac{a^m z}{b}$, e differenziando, $my^{m-1} dy = \frac{a^m dz}{b}$. Ma condotto il raggio Ap infinitamente prossimo ad AP, e chiamata $BR = dx$, per i settori simili APp, ABR, sarà $dz = \frac{adx}{y}$, quindi posto questo valore in luogo di dz nell' equazione differenziale, sarà $my^m dy = \frac{a^{m+1} dx}{b}$, e però di nuovo differenziando, presa dx costante, $mmy^{m-1} dy^2 + my^m ddy = 0$, cioè $yddy = -mdy^2$. Fatta pertanto la sostituzione di questo valore, e del valore di dx nella formola del co-raggio, sarà $BE = \frac{y \times \overline{mmbby^{2m} + a^{2m+2}}}{mmbby^{2m} + \overline{1+m} \times a^{2m+2}}$. Si faccia TAC perpendicolare ad AB, e si tiri la tangente BT della curva in B, e BC normale, sarà $AT = \frac{mby^{m+1}}{a^{m+1}}$, $AC = \frac{a^{m+1}}{mby^{m-1}}$, e però $TC = \frac{mmbby^{2m} + a^{2m+2}}{mba^{m+1} y^{m-1}}$, quindi la quarta proporzionale di $TA + \overline{m+1} \times AC$, di TC, e di AB sarà $\frac{y \times \overline{mmbby^{2m} + a^{2m+2}}}{mmbby^{2m} + \overline{1+m} \times a^{2m+2}} = BE$, e però

 con-

condotta EQ parallela alla TC, incontrerà la normale BC nel punto Q, che sarà all'evoluta.

ESEMPIO VII.

131. Sia la curva ABD (*Fig.* 95.) la metà della cicloide ordinaria, la di cui equazione $dy = dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, essendo $AC = 2a$, $AP = x$, $PB = y$.

Differenziando, presa dx costante, sarà $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{2ax - xx}}$, e posti questi valori nella formola del raggio osculatore $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, sarà $BQ = 2\sqrt{4aa - 2ax}$; ma la normale $BG = \sqrt{4aa - 2ax} =$ alla corda EC, dunque il raggio osculatore $BQ = 2BG = 2EC$.

Fatta $x = 0$, per avere il raggio osculatore nel punto A, sarà $BQ = AN = 4a$, e però $CN = CA = 2a$.

Fatta $x = 2a$, il raggio osculatore nel punto D sarà $= 0$, e però l'evoluta principia in D, e termina in N.

Poichè

Poichè la tangente in B della cicloide è parallela alla corda EA, (num. 47.) sarà la normale BQ parallela alla corda EC. Ciò posto, si compisca il rettangolo $DCNS$, ed al diametro $DS = CN = AC$ si descriva il semicircolo DIS, e si tiri la corda DI parallela alla BQ, o sia alla EC. Saranno gl' angoli CDI, DCE eguali, e per conseguenza gl' archi DI, CE, e le corde; dunque DI, GQ eguali, e parallele, e condotta IQ, sarà essa eguale, e parallela a DG; ma per la proprietà della cicloide, la DG è eguale all'arco EC, e però all'arco DI, dunque l'arco $DI = IQ$, ed il semicircolo $DIS = SN$, quindi l'evoluta DQN è la stessa cicloide DBA inversamente posta.

132. Avuta sufficiente notizia, e ritrovate le formole de' raggi osculatori, non è difficile il ritrovare la formola de' regressi della seconda specie di sopra promessa al num. 98.

Sia la curva BAC (*Fig.* 96.) con un flesso contrario in A, e si sviluppi dal filo principiando in un qualunque punto D diverso dal flesso contrario A. Lo sviluppo della porzione DC genera la curva DG; quello della porzione DA la curva DE; e quello della porzione AB la curva EF di modo, che lo sviluppo di tutta la BAC formerà la intera curva $FEDG$;

la quale â due regressi, uno in D della solita forma, poichè i due rami DE, DG si voltano le convessità, l'altro in E della seconda sorta, per essere i due rami ED, EF concavi verso la stessa parte. Sieno NM, Nnm due qualunque raggi infinitamente prossimi dell' evoluta DA, ed NH, nH due normali alla stessa, saranno simili i due settori infinitesimi NmM, HNn, quindi HN, $NM :: Nn$, Mm; ma nel punto del flesso contrario A, il raggio HN (num. 121.) deve essere o infinito, o eguale al zero, ed il raggio NM, che diventa AE, rimane finito, adunque nel caso del flesso contrario A, cioè nel punto del regresso E della seconda sorta, la ragione di Nn, Mm, vale a dire la ragione della differenziale del raggio MN all' elemento della curva, deve essere infinitamente grande, o infinitamente piccola. Ma la formola del raggio MN è $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, presa dx costante, il di cui differenziale è $\frac{-3dxdyddy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2} + dxdddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy^2}$, ed $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, dunque

$\frac{Nn}{Mm} = \frac{dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dyddy^2}{dxddy^2}$ = al zero, o all' infinito, formola per i regressi della seconda sorta.

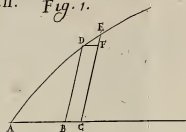
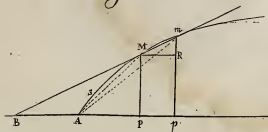
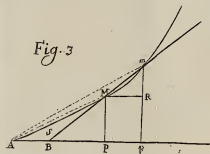
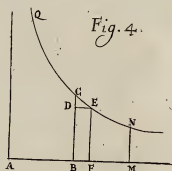
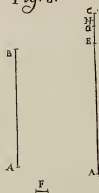
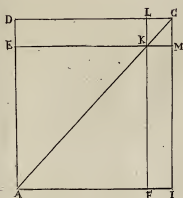
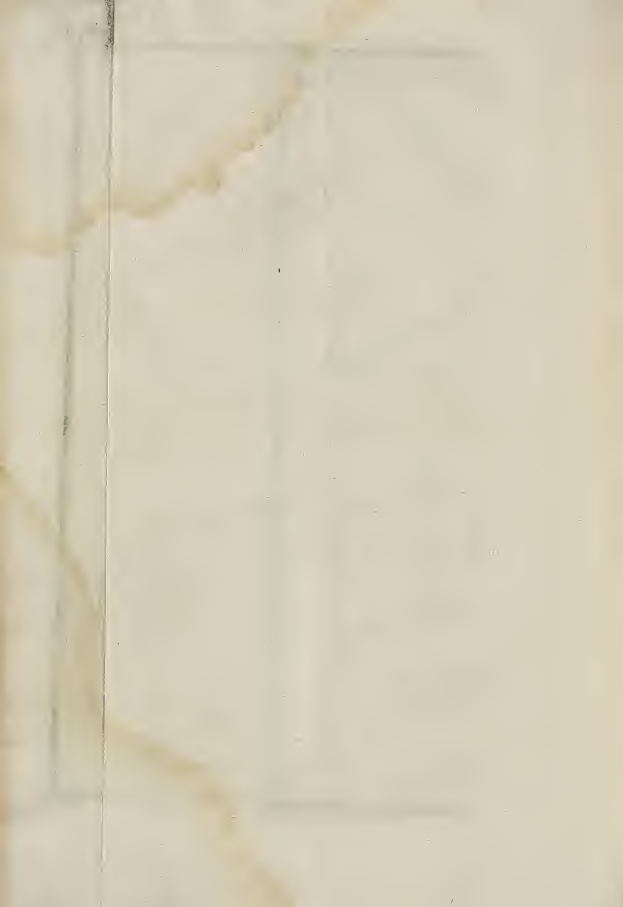
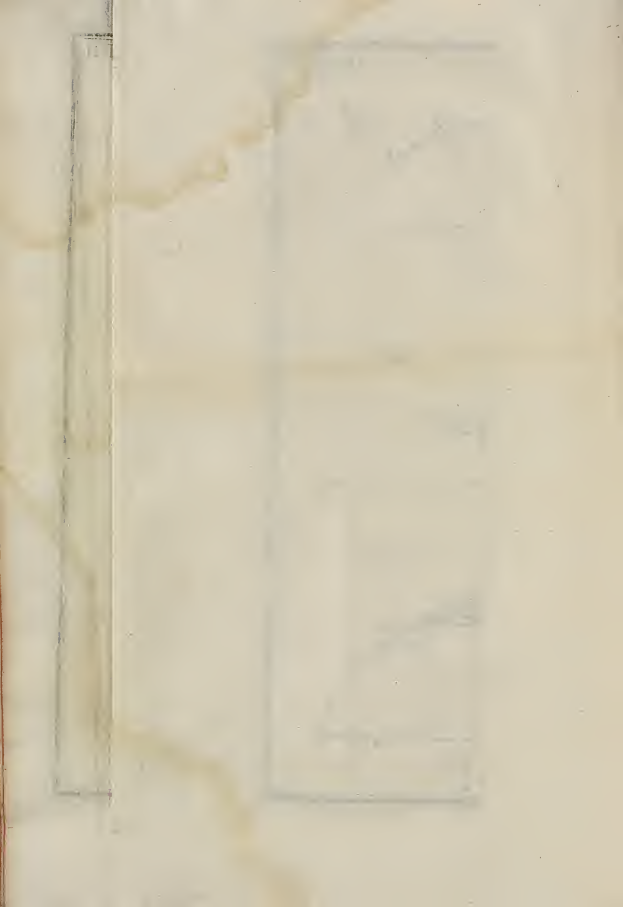
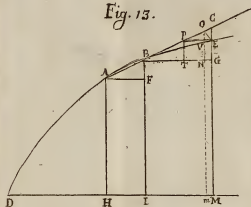
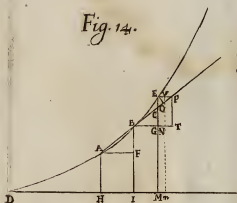
Questa

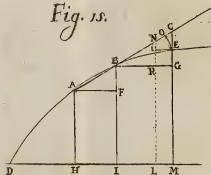
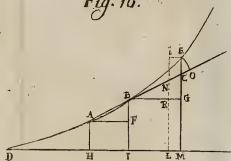
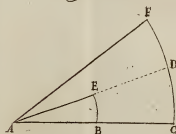
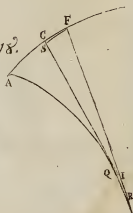
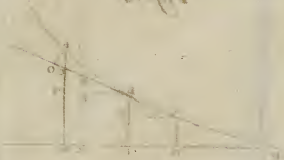
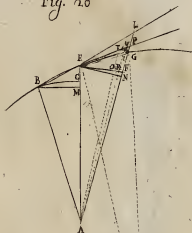
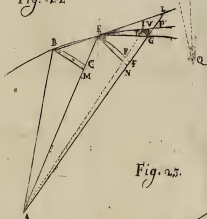
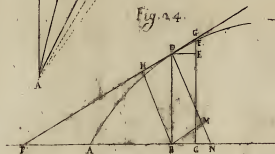
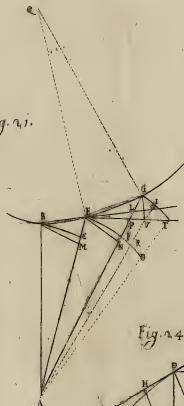
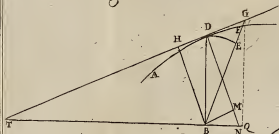
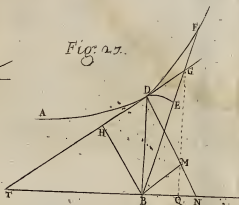
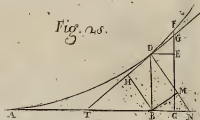
Questa formola è la stessa della ritrovata al num. 125., ma in quel luogo essa serve per i regressi della prima sorta delle evolute, e questa per i regressi della seconda sorta delle curve genite dell'evolute, essendo x, ed y le coordinate nell'uno, e nell'altro caso delle curve genite.

FINE DEL SECONDO LIBRO.

INSTITUZIONI
ANALITICHE
LIBRO TERZO
Del Calcolo Integrale.

Fig. 1.
E
D
F
A
B
C
Fig. 2.
m
M
R
S
B
A
P
p
Fig. 3
m
M
R
S
A
B
P
p
Q
Fig. 4.
C
D
E
N
A
B
F
M
Fig. 5.
C
H
G
E
B
A
A
F
D
L
C
Fig. 6.
E
K
M
G
B
A
F
I
A
H

Fig. 7
D
C
L
I
E
B
H
M
A
Fig. 8
S
C
E
B
G
A
F
D
H
I
M
Fig. 9
E
C
S
B
G
A
F
D
H
I
M
Fig. 10
D
E
F
O
G
A
M N
B
C
R
Q
Fig. 11
S O C
R
B
P
E
G
A
F
D
H
I
M
Q
N
Fig. 12
N
E
R
B
C S O
G
A
F
P
D
H
I
M

TOM. II.
Lib. II.
T. III.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.

TOM. II.
Lib II.
T. IV.
Fig. 19.
Fig. 20
Fig. 21.
Fig. 22
Fig. 23.
Fig. 24.

TOM. II.
Lib. II.
T. V.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30
Fig. 31.

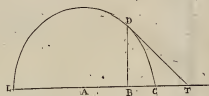
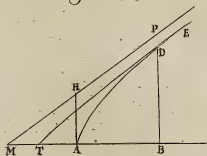
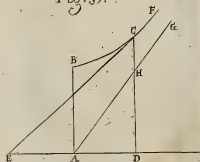
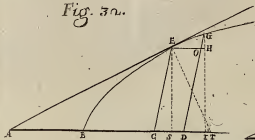
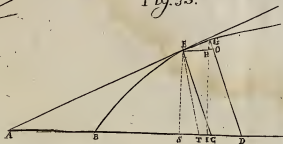
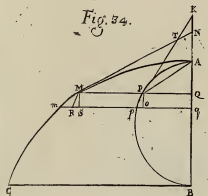
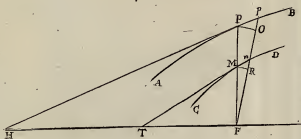
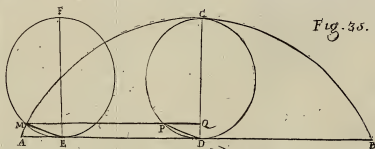
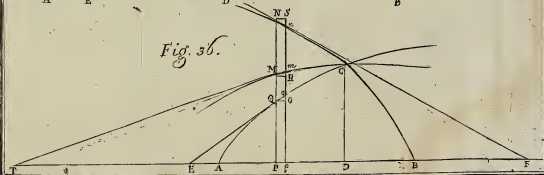
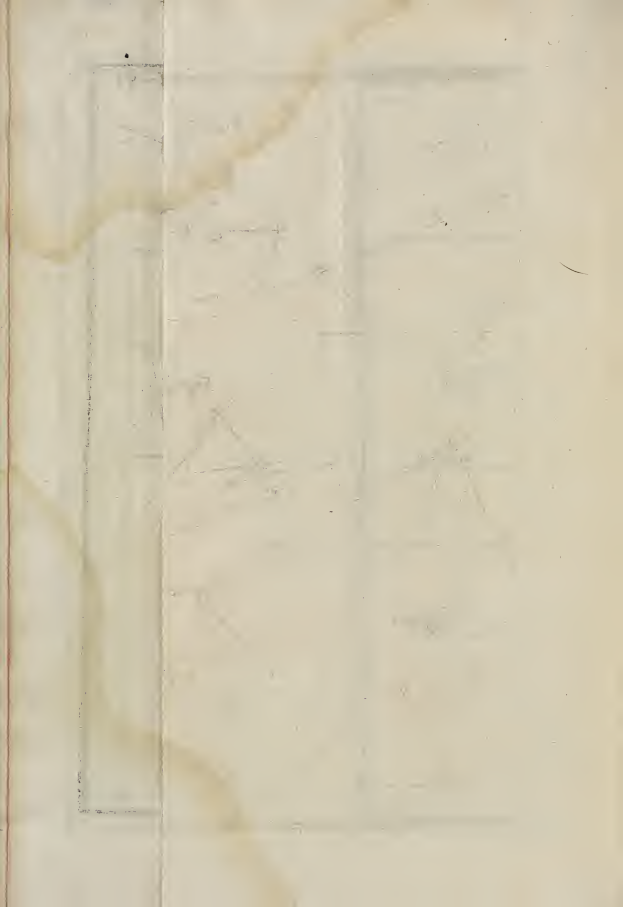
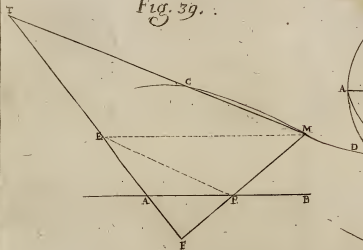
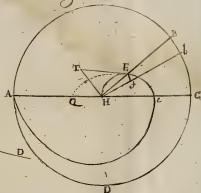
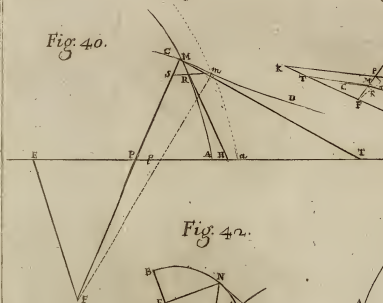
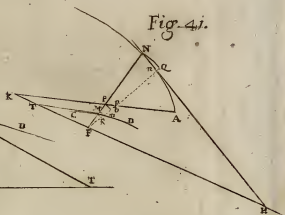



Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 37.
Fig. 35.
Fig. 36.

TOM. II.
Lib. II.
T. VII.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.

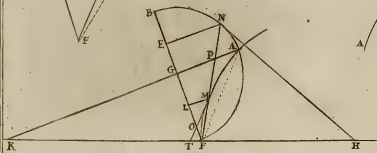
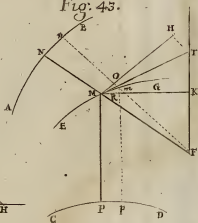
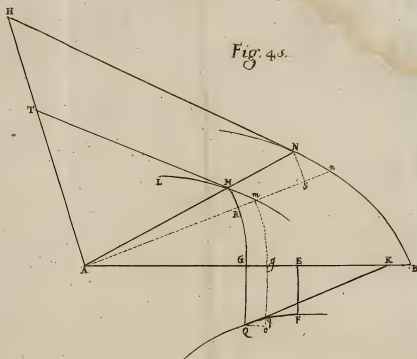
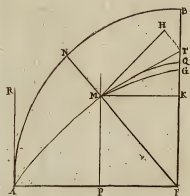
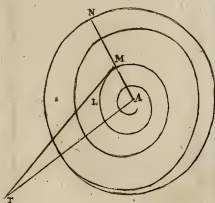
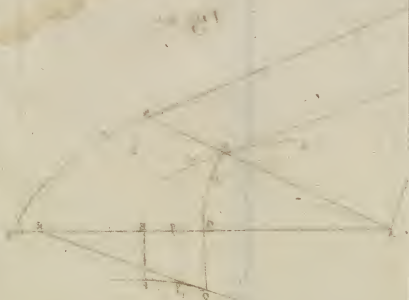
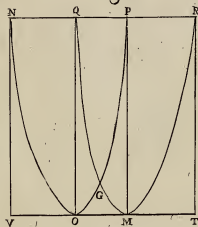
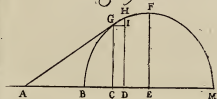
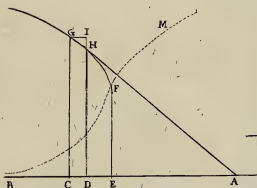
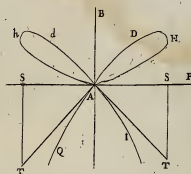
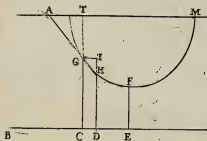
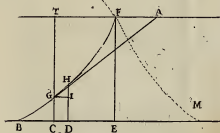
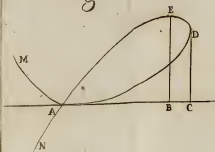
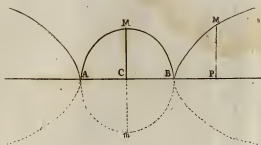



Fig. 45.
H
T
N
n
L
M
m
S
R
A
G
g
E
K
B
F
Q
o
q
Fig. 44.
B
H
T
Q
G
N
R
M
K
A
P
F
Fig. 46.
N
M
L
A
T

TOM. II.
Lib. II
T.X.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.

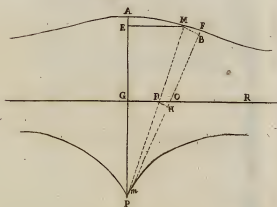
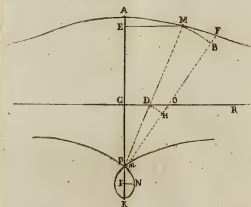
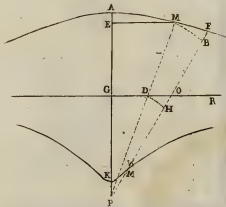
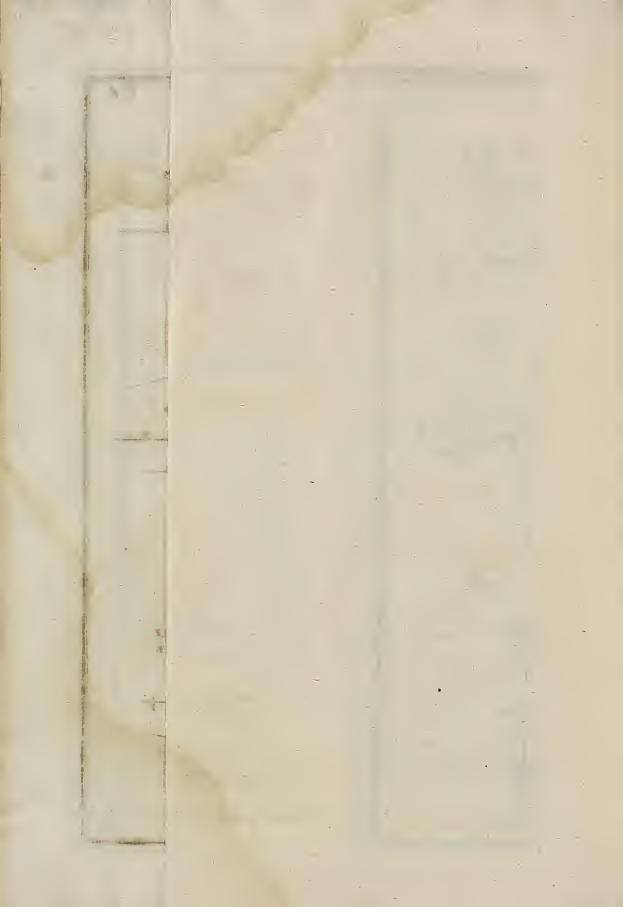



Fig. 59.
A
M
N
P
m
n
p
H
D
E
F
B
Fig. 60.
Q
D
A
C
B
H
Fig. 61.
A
C
E
F
B
Fig. 62.
E
B
A
H
C
D
Fig. 63.
D
N
M
P
B
c
Q
G
A
T
S
C
K
O
V
H
F
Fig. 64.
M
M
E
G
D
F
P
T
A
B
C
H

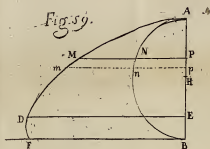
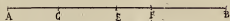
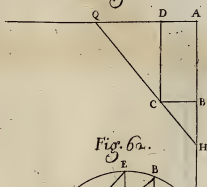
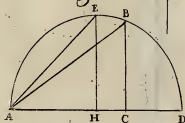
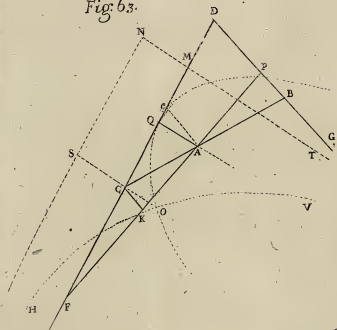
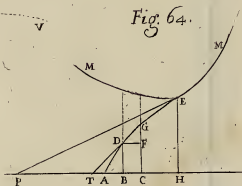
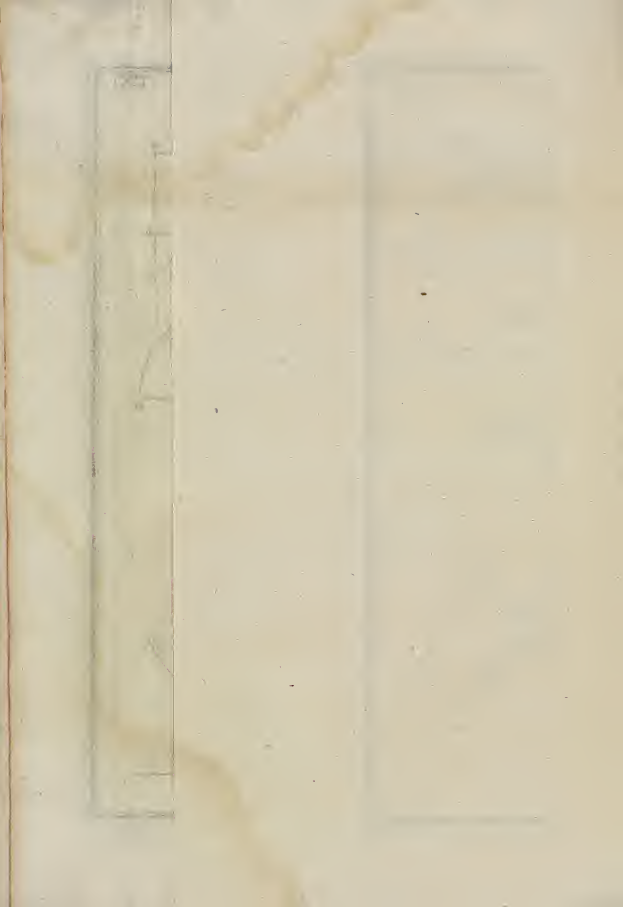
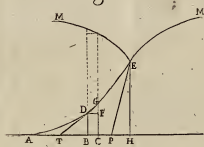
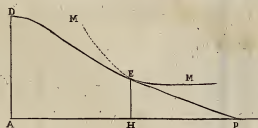



Fig. 65.
M
M
E
G
D
F
A
T
B
C
P
H
Fig. 66.
D
M
E
M
A
H
P
Fig. 67.
d
E
D
t
H
o
M
T
A
Q
Fig. 68.
E
d
D
A
M
H
o
T
t
Q
Fig. 69.
M
D
M
B
C
A
Q
Fig. 70.
C
A
B

Fig. 71.
D
B
F
M
A
Q
Fig. 72.
A
M
N
P
C
F
B
Fig. 73.
A
M
N
P
C
D
E
F
B
Fig. 74.
A
M
N
P
C
F
B
Fig. 76
G
M
I
H
O
N
T
F
A
C
D
Fig. 75.
Q
G
M
O
N
I
H
T
F
A
C
D

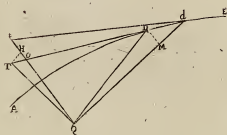
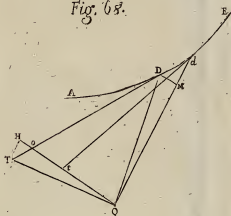
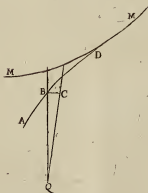
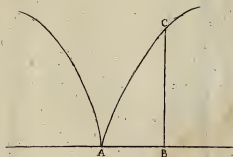
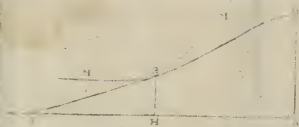
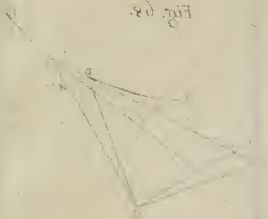
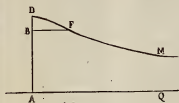
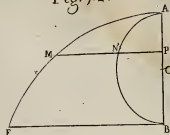
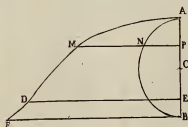
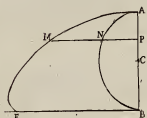
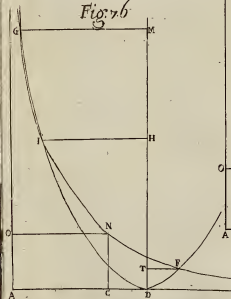
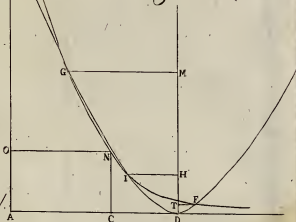
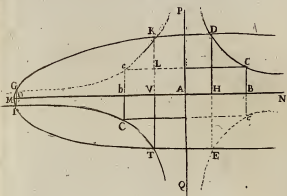
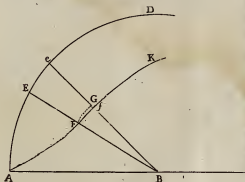
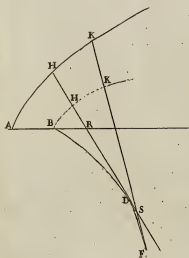
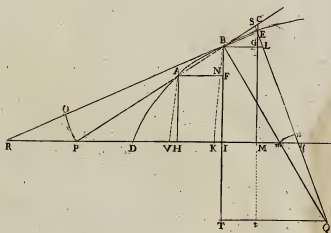
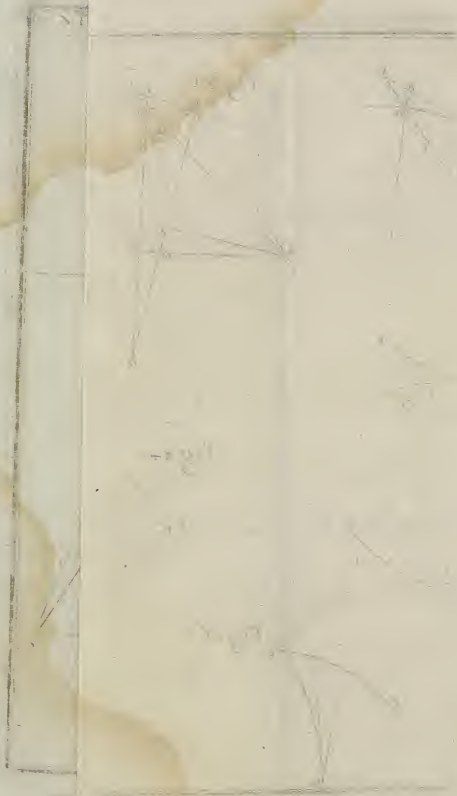
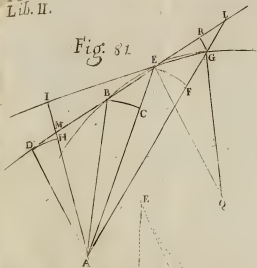
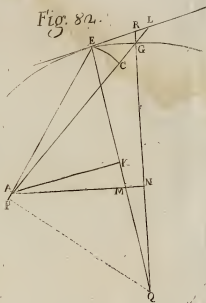



Fig. 77.
Fig. 78
Fig. 79.
Fig. 80.

TOM. II.
Lib. II.
T. XV
Fig. 81
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.

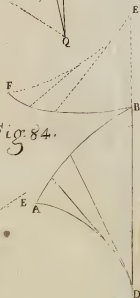
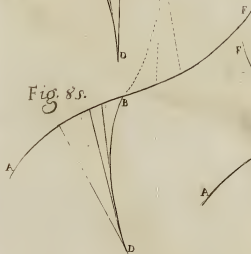
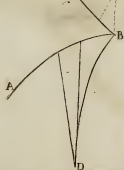
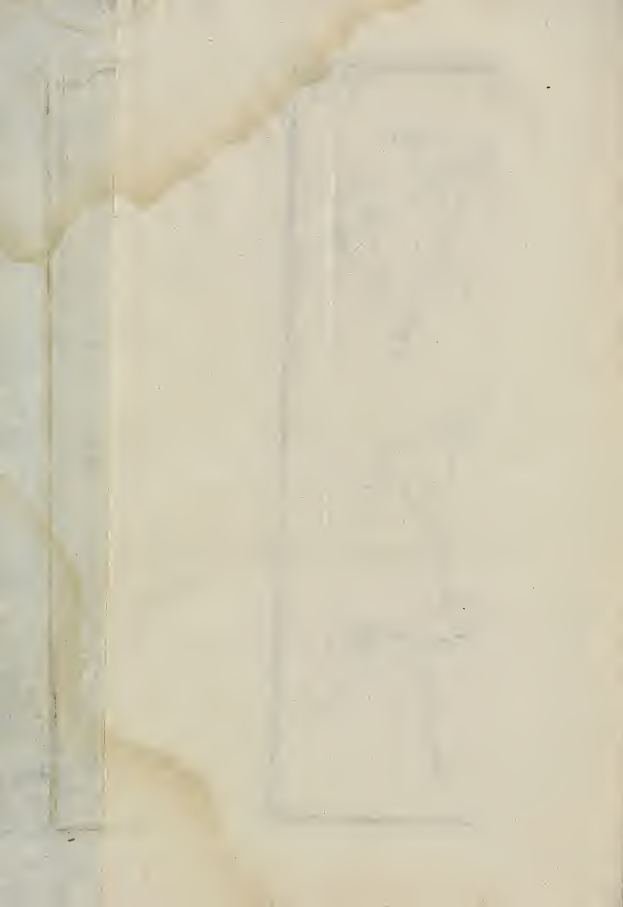
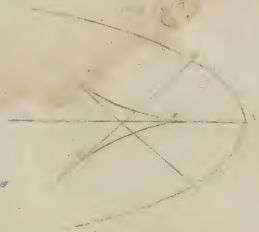
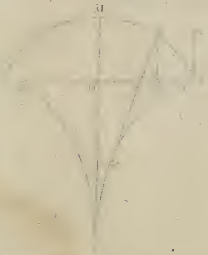



Fig. 87.
B
T
A
P
K
M
K
S
E
Q
Fig. 88.
B
A
N
q
Q
b
Fig. 89.
R
E
Q
Q
L
D
N
B
M
A
H
F
P
K
T
S
Fig. 90.
M
B
L
Q
A
P
C
Fig. 91.
D
F
B
A
M
P
G
O
R
H
Q
Q

Fig. 92.
Q
E
D
B
A
K
T
P
H
Fig. 93.
D
M
R
B
C
A
Q
T
Fig. 94.
D
p
P
C
m
Q
R
B
E
N
A
T
Fig. 95.
A
K
B
E
P
D
G
C
Q
I
S
N
Fig. 96.
E
G
M
m
B
A
M
n
D
C
F
H

INSTITUZIONI ANALITICHE

LIBRO TERZO

Del Calcolo Integrale.

IL Calcolo Integrale, che ſuole dirſi ancora calcolo ſommatorio, è un metodo di ridurre una quantità differenziale a quella quantità, di cui eſſa è la differenza, onde le operazioni del calcolo integrale ſono oppoſte a quelle del differenziale, e però ſi chiama ancora metodo inverſo delle fluſſioni, o ſia delle differenze. Per cagion d'eſempio il differenziale di x è dx, e per conſeguenza x è l'integrale di dx. Quindi ſarà ſegno ſicuro, che ſia giuſto quell'integrale, che differenziato reſtituirà la quantità propoſta da integrarſi. In due diverſe maniere ſi ricercano gl'integrali delle formole differenziali, in una per mezzo di eſpreſſioni finite algebraiche, o ridotte a quadrature ſuppoſte; nell'altra facendo uſo delle ſerie. Delle regole della prima maniera tratterò nel primo Capo; dell'altra nel ſecondo, a cui aggiungerò il terzo dell'uſo di eſſe regole per le retificazioni di curve, quadrature di ſpazj ec., e finalmente il quarto, che tratterà del Calcolo Eſponenziale.

CAPO I.

Delle regole dell' integrazioni espresse da formole finite algebraiche, o ridotte a quadrature supposte.

1. Come nelle quantità incomplesse elevate a qualunque potestà il differenziale loro è il prodotto dell' esponente della variabile nella variabile stessa elevata alla medesima potestà diminuita dell'unità, e moltiplicata nella sua differenza; così l'integrale del prodotto d'una variabile elevata a qualunque potestà nella differenza della stessa variabile è la variabile elevata alla potestà, il di cui esponente sia accresciuto dell'unità, divisa per lo stesso esponente così accresciuto, e ciò qualunque siasi l'esponente della potestà della variabile nella formola differenziale, cioè positivo, o negativo, intiero, o rotto. Per esempio l'integrale di $mx^{m-1}dx$ sarà $\frac{mx^{m-1+1}}{m-1+1}$, cioè x^m. L'integrale di $x^{\pm\frac{m}{n}}dx$ sarà egli $\frac{x^{\pm\frac{m}{n}+1}}{\pm\frac{m}{n}+1}$, cioè $\frac{nx^{\frac{\pm m+n}{n}}}{\pm m+n}$.

2. Nè punto alterano la regola le quantità costanti incomplesse, o complesse, per le quali sia moltiplicata, o divisa la formola differenziale, rimanendo esse nell'

nell' integrale, quali erano nella formola differenziale, e però l'integrale di $\frac{aax^n dx}{mb - cc}$ sarà $\frac{aax^{n+1}}{\overline{n+1} \times \overline{mb-cc}}$.

3. Che se la formola differenziale sarà una frazione, il di cui denominatore sia pure una qualunque potestà della variabile moltiplicata ancora, se si vuole, per qualunque costante, come a dire la formola $\frac{x^m dx}{aax^n - bbx^n}$, cioè $\frac{x^m dx}{\overline{aa-bb} \times x^n}$, come che essa è la medesima di questa $\frac{x^{m-n} dx}{aa - bb}$, sarà perciò soggetta alla data regola.

4. Ma quì fa d'uopo avvertire, che acciò gl'integrali sieno compiti, devesi ad essi sempre aggiungere, o da essi sottrarre una quantità costante a piacere, la quale ne' casi particolari si determina poi, come si vedrà a suo luogo.

Quindi l'integrale compito, per esempio, di dx sarà $x \pm a$, (intendendo per a una costante qualunque) di $xxdx$ sarà $\frac{x^3}{3} \pm a^3$, e così degl'altri. La ragione di ciò è, che non avendo le quantità costanti differenziale, la dx tanto può essere la differenziale di x, quanto di $x + a$, quanto di $x - b$ ec., e però tanto x, quanto $x + a$, quanto $x - b$ ec. possono essere gl' integrali di dx; lo stesso vale di qualunque altra formola.

5. La ſteſſa regola d'integrare ſerve per le formole differenziali compleſſe, cioè compoſte di molti termini, purchè, ſe ànno denominatore, ſia egli o tutto coſtante, o ſe contiene la variabile, ſia incompleſſo, cioè d'un ſolo termine, o riducibile ad eſſer tale.

Imperocchè in queſti caſi la formola differenziale compleſſa ſi riſolve in altrettante incompleſſe, quanti ſono i termini della compleſſa, e però ciaſcheduna è ſoggetta alla mentovata regola. Sia la formola $\frac{bx^m dx + aax^{m-1} dx}{aa - bb}$; queſta equivale alle due $\frac{bx^m dx}{aa - bb} + \frac{aax^{m-1} dx}{aa - bb}$, e però gl'integrali di queſte due formole saranno l'integrale della prima, cioè $\frac{bx^{m+1}}{m+1 \times aa - bb} + \frac{aax^m}{m \times aa - bb} \pm f$.

Sia $\frac{bx^3 dx - a^4 dx}{axx - cxx}$; queſta equivale alle due $\frac{bx^3 dx}{a - c \times xx} - \frac{a^4 dx}{a - c \times xx}$, cioè $\frac{bxdx}{a - c} - \frac{a^4 x^{-2} dx}{a - c}$, e però l'integrale ſarà $\frac{bxx}{2 \times a - c} - \frac{a^4 x^{-1}}{-1 \times a - c} \pm f$, cioè $\frac{bxx}{2a - 2c} + \frac{a^4}{a - c \times x} \pm f$.

Sia $\frac{bx^m dx - aax^{m-1} dx}{xx}$; queſta equivale alle due $bx^{m-2} dx - aax^{m-3} dx$, e però l'integrale ſarà $\frac{bx^{m-1}}{m-1} - \frac{aax^{m-2}}{m-2} \pm f$.

6.

6. Se in oltre la formola differenziale compleſſa ſarà elevata a qualche poteſtà, il di cui eſponente ſia poſitivo, ed intiero, ridotta eſſa attualmente alla data poteſtà, ciaſcun termine s'integrerà colla ſteſſa regola.

7. Tutto ciò, che fin'ora ô detto, procede quando nella formola differenziale neſſun termine vi ſia, in cui l'eſponente della variabile ſia l'unità negativa, come $\frac{adx}{x}$, o ſia $ax^{-1}dx$, imperocchè ſecondo la regola l'integrale ſarebbe $\frac{ax^{-1+1}}{-1+1}$, o ſia $\frac{ax^{0}}{0}$, cioè infinito; il che nulla ci fa ſapere.

8. In queſti caſi adunque biſogna ricorrere ad altri metodi. Due ſono quelli, che ſervono: uno per mezzo d'una curva, che ſi chiama *Logaritmica*, ed anco *Logiſtica*, l'altro per mezzo di ſerie infinite. Delle ſerie infinite, delle quali in moltiſſimi altri caſi ſi può fare uſo, come ſi vedrà, ne parlerò nel ſecondo Capo.

9. Per ora, quanto alla Logaritmica, ella è una curva di tale proprietà, che preſe nell'aſſe le aſſiſſe in proporzione aritmetica, le corriſpondenti ordinate ſono in proporzione geometrica. E però l'aſſe AD (*Fig.* 1.) ſi divida in parti eguali AB, BC, CD ec., ſu i punti A, B, C, D ec. ſi eriggano le perpendicolari AE, BF, CG, DH ec. tali, che ſieno tra di loro in geometrica proporzione; i punti E, F, G, H ec. ſaranno

nella

nella curva, e di nuovo dividendo in parti eguali le AB, BC ec., e ſopra le diviſioni alzando le perpendicolari nella ſteſſa geometrica proporzione, ſi averanno altri punti intermedj, e finalmente moltiplicando in infinito le diviſioni, avremo infiniti punti, cioè la curva ſteſſa.

Diviſo adunque l'aſſe in parti infinitiſſime, ed eguali, ſia una di queſte $CM = dx$, l'ordinata $CG = y$, e ad eſſa infinitamente proſſima MO, ſarà adunque $NO = dy$. Sia un'altra ordinata $DH = z$, ed altre, quante ſi vuole, corriſpondenti ad aſſiſſe aritmeticamente proporzionali. Averanno adunque eſſe ordinate tra loro la medeſima proporzione, ma per conſeguenza ſaranno pure nella ſteſſa proporzione le loro differenziali, adunque ſarà $dy, dz :: y, z$, o ſia $dy, y :: dz, z$; onde ſarà coſtante la ragione di dy alla y, e però aſſumendoſi coſtante la dx, ſarà $dy, y :: dx, a$, cioè $\frac{ady}{y} = dx$, equazione della curva.

E' facile il vedere, che la ſottangente di queſta curva ſarà ſempre coſtante, imperocchè nella formola generale della ſottangente $(\frac{ydx}{dy})$ ſoſtituito in luogo di y il valore dato dall'equazione della curva, avraſſi $\frac{ydx}{dy} = \frac{adydx}{dxdy} = a$. Ma comecchè la progreſſione geometrica creſcente delle ordinate ſi può produrre in infinito

to, crefcendo pure in infinito aritmeticamente le affiffe, anderà in infinito la curva, e fempre allontanandofi dall'affe. E perchè la fteffa progreffione fi può produrre ancora in infinito, ma decrefcente, crefcendo fempre le affiffe, anderà da queft'altra parte in infinito la curva, ma fempre accoftandofi all'affe fenza toccarlo mai, e però farà egli afintoto di effa curva.

10. In queft'altra maniera ancora, fra le molte, fi può intendere defcritta la Logaritmica.

Sia la retta indefinita MH (*Fig.* 2.) divifa in parti eguali MN, NB, BK ec., e prefa NI a piacere, ful punto I fi alzi la normale IO di quella grandezza, che fi vuole, indi fi conduca NO, e ful punto A fi alzi la normale AC fin che incontri NO prodotta in C; dal punto B fi tiri BC, e ful punto E fi alzi la normale ED, che incontri BC prodotta in D; dal punto K fi tiri KD, e ful punto F fi alzi la normale FP, che incontri KD prodotta nel punto P; e nello fteffo modo fi continovi in infinito l'operazione, ed i punti O, C, D, P ec. faranno nella curva logaritmica. Per avere i punti intermedj fra O, C, D, P ec. fi dividano per metà le porzioni MN, NB, e ripetuta la fteffa operazione, fi avranno altri punti, e finalmente col moltiplicare in infinito le divifioni eguali nella retta MH, cioè col fupporre infinitefime, ed eguali le porzioni MN, NB ec. averemo infiniti punti, i quali ci fegneranno la

curva

curva logaritmica, la di cui ſottangente, come appariſce dalla coſtruzione, ſarà ſempre coſtante. Chiamata adunque $NI=a$, e poſte $=dx$ le infiniteſime coſtanti porzioni dell'aſſe, ſia l'ordinata $GR=y$, $GH=dx$, $TS=dy$; per la ſimilitudine de' triangoli STR, RGA, ſarà dy, $dx::y$, a; cioè $\frac{ady}{y}=dx$, equazione della curva.

Da queſta coſtruzione ſi deduce pure quello, che la prima ſuppone, vale a dire la primaria proprietà della logaritmica, che ſieno in geometrica proporzione le ordinate, che corriſpondono alle aſſiſſe in proporzione aritmetica. Imperocchè, ſuppoſte infiniteſime le eguali porzioni dell'aſſe, l'archetto OC ſarà la tangente NO prodotta, l'archetto CD ſarà la tangente BC prodotta, l'archetto PD la tangente KD prodotta, e così di tutti gl'altri; ſaranno adunque ſimili i triangoli OIN, CAN, e però ſarà OI, $CA::NI$, NA; così pure per la ſimilitudine de' triangoli CAB, DEB ſarà CA, $DE::BA$, BE; ma $NI=BA$, $NA=BE$, adunque ſarà OI, $CA::CA$, DE, e così ſucceſſivamente; e però le ordinate ſaranno in continua proporzione geometrica. Quindi anche conſiderando l'aſſe non diviſo in parti infiniteſime, ma finite, ed eguali, perchè le intermedie ordinate proporzionali fra IO, per eſempio, e CA ſono nè più, nè meno di numero delle intermedie fra CA, e DE, e così dell'altre; ſaranno pure le IO,

CA,

CA, DE in proporzione geometrica corrispondenti ad assisse in proporzione aritmetica. Anzi prese due ordinate a piacere, e prese due altre, dovunque si vuole, purchè la distanza fra la prima, e la seconda sia la stessa della distanza fra la terza, e la quarta, come sarebbero IO, CA, RG, SH; sarà la prima alla seconda, come la terza alla quarta.

La curva logaritmica non si può geometricamente descrivere, bensì organicamente, e però è una curva mecanica, e l'impossibilità di essere geometricamente descritta è la stessa dell'impossibilità della quadratura dello spazio iperbolico, come si vedrà a suo luogo; quindi gl'integrali di quelle formole differenziali, che portano alla logaritmica, si dicono ancora dipendere dalla quadratura dell'iperbola.

Nella logaritmica adunque le porzioni dell'asse, o sia le assisse prese da un punto fisso corrispondono alle ordinate in quella guisa appunto, che nelle tavole trigonometriche corrispondono i logaritmi alla serie naturale de' numeri.

11. Ciò posto sia (*Fig.* 3.) la logaritmica DC, la di cui sottotangente eguale all'unità, o pure, se si vuole, eguale alla costante a, e sia l'ordinata AD eguale alla sottangente, cioè eguale all'unità, o sia alla costante a, che fa figura d'unità. Presa una qualunque assissa $AB = x$, sia $BC = y$, ma l'equazione della

curva è $\frac{ady}{y} = dx$, adunque l'integrale di $\frac{ady}{y}$ sarà x, ma $x = AB$, ed AB è il logaritmo di BC, cioè di y, adunque servendosi del segno $\int$ per significare integrale o somma, che vuol dire lo stesso, e del segno l, che vuol dire logaritmo, sarà $\int \frac{ady}{y} = ly$ nella logaritmica, la di cui sottangente sia $= a$. Istessamente sarà $\int \frac{dy}{y} = ly$ nella logaritmica della sottangente $= 1$; $\int \frac{bdy}{y} = ly$ nella logaritmica della sottangente $= b$; $\int \frac{ady}{b+y} = l\overline{b+y}$ nella logaritmica della sottangente $= a$, cioè presa nella logaritmica la ordinata $BC = AH = y$, se ad essa si aggiungerà $HK = b$, e si condurrà KG parallela all'asintoto, e si abbasserà GE parallela ad AD, sarà $GE = y + b$, e però $AE = l\overline{b+y}$.

12. Dalla natura della logaritmica chiaramente si vede, che qualunque volta la quantità, di cui si vuole il logaritmo, è quantità infinita, facendo essa figura di ordinata infinita nella logaritmica, sarà pure infinita l'intercetta nell'asse fra essa, ed il punto A, e però infinito il logaritmo; e se essa sarà eguale alla prima AD, cioè alla sottangente, il logaritmo sarà eguale al zero;

e se sarà minore di AD, come sarebbe $\Omega\Lambda$, il logaritmo sarà ΩA, e negativo; e finalmente se sarà $=0$, il logaritmo sarà infinito. Se la formola differenziale fosse $-\frac{dy}{y}$, l'integrale sarebbe $-ly$, e se fosse $-\frac{dy}{a+y}$, l'integrale sarebbe $-l\overline{a+y}$, ma se sarà $-\frac{dy}{a-y}$, l'integrale sarà $l\overline{a-y}$, e se sarà $\frac{dy}{a-y}$, l'integrale sarà $-l\overline{a-y}$, intendendo questi logaritmi nella logaritmica della sottangente eguale all'unità. La ragione di ciò si è, che siccome l'integrale di $\frac{dy}{y}$ è ly, così il differenziale di ly è $\frac{dy}{y}$, e generalmente parlando, il differenziale di una quantità logaritmica è la frazione, il di cui numeratore sia il prodotto della sottangente nel differenziale della quantità, ed il denominatore la quantità stessa, adunque il differenziale di $-l\overline{a+y}$ sarà $-\frac{dy}{a+y}$; il differenziale di $l\overline{a-y}$ sarà $-\frac{dy}{a-y}$; il differenziale di $-l\overline{a-y}$ sarà $\frac{dy}{a-y}$, supposta la sottangente della logaritmica $=1$; e quando non sia tale, si moltiplicheranno i numeratori dei differenziali nella data sottangente.

13. Ma poichè la logaritmica non â ordinate nega-

tive, pare, che non si saprebbe ritrovare la quantità, che corrisponda all'espressione $\overline{la-y}$, cioè quale sia il logaritmo di $a-y$, qualora $a-y$ sia quantità negativa, cioè y maggiore di a; ma in questo caso avvertasi, che è la stessa cosa $\overline{la-y}$, e $\overline{ly-a}$, e che in tale supposto essendo $y-a$ positiva essa può essere ordinata nella logaritmica, ed in fatti differenziando il primo logaritmo si â $\frac{-dy}{a-y}$, differenziando il secondo si â $\frac{dy}{y-a}$, e mutando i segni al numeratore, e denominatore, si â $\frac{-dy}{a-y}$, che è lo stesso del primo.

14. Dalla proprietà della logaritmica altre se ne deducono intorno alle quantità logaritmiche, ed in primo luogo, che il multiplo, o submultiplo di un logaritmo sarà il logaritmo della quantità elevata alla potestà del dato numero, così $2lx=lxx$; $3lx=lx^3$; $\frac{1}{2}lx=l\sqrt{x}$; $\frac{1}{3}lx=l\sqrt[3]{x}$; $nlx=lx^n$; $\frac{1}{n}lx=lx^{\frac{1}{n}}$, e la ragione si è, perchè, presa nella logaritmica una qualunque ordinata $OP=y$, il di cui logaritmo è AO (*Fig.* 3.), se si faranno AO, OS, SV ec. eguali tra loro, saranno AO, AS, AV aritmeticamente proporzionali, e le ordinate AD, OP, ST, VI ec. saranno geometricamente proporzionali, onde posta AD eguale all'unità, $OP=y$, sarà $ST=yy$, $VI=y^3$ ec., ma AS doppia di AO è logaritmo

garitmo di yy, cioè lyy, ed AV tripla di AO è ly^3; adunque $2ly = lyy$, $3ly = ly^3$. Così pure, posta $AO = ly$, e divisa per metà in M, sarà $MN = \sqrt{y}$, e però $AM = \frac{1}{2} AO$, cioè $\frac{1}{2} ly$, sarà $ly^{\frac{1}{2}}$. Isteſſamente posta $QR = y$, e divisa AQ in tre parti eguali in M, ed O, sarà $MN = \sqrt[3]{y}$, cioè $y^{\frac{1}{3}}$, ma $AM = \frac{1}{3} ly$, adunque $\frac{1}{3} ly = ly^{\frac{1}{3}}$, e così degl'altri.

Nè devesi ommettere di avvertire, che l'integrale di $\frac{-dy}{y}$ non è solo $-ly$, come si è veduto al num. 12., ma che può esprimersi anco per $l\frac{1}{y}$, o sia ly^{-1}; conciosiacchè presa nella logaritmica una qualunque ordinata $OP = y$, e fatta $A\Omega = AO$, sarà per la natura della curva OP, $AD :: AD$, $\Omega\Lambda$, cioè y, $1 :: 1$, $\Omega\Lambda = \frac{1}{y}$; ma $A\Omega$ è il logaritmo negativo di OP, cioè di y, ed è assieme il logaritmo di $\Omega\Lambda$, dunque sarà $-ly = l\frac{1}{y} = ly^{-1}$, vale a dire; che il logaritmo negativo di una qualunque quantità sarà lo stesso del logaritmo positivo della frazione, di cui essa quantità formi il denominatore, o sia della quantità stessa con l'esponente negativo; così sarà $-mly = l\frac{1}{y^m} = ly^{-m}$.

15. In oltre la somma di due, di tre ec. logaritmi sarà

farà eguale al logaritmo del prodotto delle quantità, delle quali essi sono i logaritmi, e la differenza di due, di tre ec. logaritmi farà eguale al logaritmo della frazione, il di cui numeratore sia il prodotto delle quantità, delle quali essi sono i logaritmi positivi, ed il denominatore sia il prodotto delle quantità, delle quali sono i logaritmi negativi. Imperocchè sia $OP = y$, $QR = z$, sarà $AO = ly$, $AQ = lz$; si prenda $QB = AO$, sarà $AB = ly + lz$; ma AB è pure il logaritmo di BC, e per la proprietà della logaritmica, BC è la quarta proporzionale di AD, OP, QR, cioè $= yz$, adunque sarà $AB = ly + lz = lzy$. Sia un'altra ordinata $MN = p$, si prenda $BV = AM$, sarà $AV = AM + AB = lp + lyz$; ma AV è il logaritmo di VI, ed $VI = pyz$, adunque $lp + ly + lz = lpyz$.

Sia di nuovo $QR = z$, $OP = y$, e si prenda $QM = AO$, sarà $AM = AQ - AO = lz - ly$; ma AM è il logaritmo di MN, e per la stessa proprietà della logaritmica, $MN = \frac{z}{y}$, adunque $AM = lz - ly = l\frac{z}{y}$. Sia un'altra ordinata $BC = p$, e si prenda $\Sigma A = BM$, sarà $\Sigma A = -AB + AM = -lp + l\frac{z}{y}$; ma ΣA è il logaritmo di $\Sigma\Pi$, ed $\Sigma\Pi$ è $= \frac{z}{py}$ (per essere la quarta pro-

por-

porzionale di BC, MN, AD), adunque $lz - ly - lp = l\frac{z}{py}$ ec.

16. Siccome negl' altri casi, così ancora in questi delle integrazioni per via di logaritmi, si deve sempre aggiungere la costante, cioè il logaritmo di quantità costante arbitraria, da determinarsi poi ne' casi particolari.

17. Ma quando le formole differenziali proposte da integrarsi sieno frazioni col denominatore complesso, si possono dare alcuni casi, ne' quali è facile avere il loro integrale col mezzo della logaritmica, e sarà ogni qual volta il numeratore della frazione sia il differenziale preciso del denominatore, o pure il multiplo, o submultiplo di esso differenziale, anzi ogni qual volta gli sia proporzionale, ed in questi casi l'integrale della formola è il logaritmo del denominatore, o pure il multiplo, o submultiplo, o proporzionale di esso logaritmo.

Così l'integrale di $\frac{2xdx}{aa+xx}$ sarà $l\overline{aa+xx}$; l'integrale di $-\frac{2xdx}{aa-xx}$ sarà $l\overline{aa-xx}$; l'integrale di $\frac{3xxdx}{a^3+x^3}$ sarà $l\overline{a^3+x^3}$; l'integrale di $\frac{4xdx}{aa+xx}$ sarà $2l\overline{aa+xx}$, cioè $l\overline{aa+xx}^2$; l'integrale di $\frac{xdx}{aa+xx}$ sarà $\frac{1}{2}l\overline{aa+xx}$,

cioè

cioè $l\overline{aa+xx}^{\frac{1}{2}}$; l'integrale di $\frac{xxdx}{a^3+x^3}$ sarà $\frac{1}{3}l\overline{a^3+x^3}$, cioè $l\sqrt[3]{a^3+x^3}$; e generalmente l'integrale di $\frac{mx^{n-1}dx}{a^n\pm x^n}$ sarà $\pm\frac{m}{n}l\overline{a^n\pm x^n}$, cioè $\pm m\,l\overline{a^n\pm x^n}^{\frac{1}{n}}$, o sia $\pm l\overline{a^n\pm x^n}^{\frac{m}{n}}$. Così l'integrale di $\frac{adx-2xdx}{ax-xx}$ sarà $l\overline{ax-xx}$; l'integrale di $\frac{\frac{1}{2}adx-xdx}{ax-xx}$ sarà $l\sqrt{ax-xx}$, e così degl' altri a piacere, presi questi logaritmi nella logaritmica della sottangente $=1$.

18. Ma se il numeratore della frazione non è della forma, che abbiamo considerata, quando però il denominatore sia tale, che nessuno de' suoi componenti lineari sia immaginario, cioè quando tutte le radici, dal prodotto delle quali egli è nato, sieno reali, allora si proceda nella seguente maniera.

19. Ed in primo luogo le radici del denominatore, o saranno tutte eguali tra loro, o no; se sono tutte eguali, come le avrebbe la formola $\frac{x^m dx}{\overline{x\pm a}^n}$, si ponga $x\pm a=z$, e però $dx=dz$, $x^m=\overline{z\mp a}^m$, $\overline{x\pm a}^n=z^n$;

e

e sostituendo nella formola questi valori, sarà $\frac{\overline{z \mp a}^{m} dz}{z^{n}}$.

Fatta pertanto attualmente la potestà m, ciascun termine si saprà integrare, o algebraicamente, o transcendentemente per mezzo della logaritmica; quindi restituito in luogo di z il valore dato per x, averemo l'integrale della proposta formola $\frac{x^{m} dx}{\overline{x \pm a}^{n}}$.

Sia per esempio $\frac{x^{3} dx}{\overline{x - a}^{3}}$. Pongo $x - a = z$, e però

$dx = dz$, $x^{3} = z^{3} + 3azz + 3aaz + a^{3}$, $\overline{x - a}^{3} = z^{3}$, e fatte le sostituzioni, sarà $\frac{z^{3} dz + 3azzdz + 3aazdz + a^{3} dz}{z^{3}}$,

ed integrando, $z + 3 \, l z - \frac{3aa}{z} - \frac{a^{3}}{2zz}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, averemo finalmente

$$\int \frac{x^{3} dx}{\overline{x - a}^{3}} = x - a + l \overline{x - a}^{3} - \frac{3aa}{x - a} - \frac{a^{3}}{2 \times \overline{x - a}^{2}},$$

il qual integrale differenziato restituirà la formola proposta da integrarsi.

20. Che se le radici del denominatore non saranno tutte eguali, ma o tutte disuguali, o miste d'uguali, e d'ineguali, allora conviene prima preparare la formola col rendere positivo il termine della massima

poteſtà della variabile nel denominatore, ſe foſſe negativo, indi liberarlo da' coefficienti, ſe ne â, di poi ſe la variabile nel numeratore, quando vi ſia, foſſe elevata a poteſtà maggiore, o eguale alla maſſima, che â nel denominatore, debbeſi dividere il numeratore per lo denominatore fin' a tanto, che l'eſponente della variabile in quello ſia minore, che in queſto; in fine ſi trovino algebraicamente le radici del denominatore. Sia per cagion d'eſempio la formola $\frac{-aadx}{aa-4xx}$. Mutando i ſegni, e dividendo per 4, ſarà $\frac{\frac{1}{4}aadx}{xx-\frac{1}{4}aa}$, cioè $\frac{\frac{1}{4}aadx}{\overline{x-\frac{1}{2}a}\times\overline{x+\frac{1}{2}a}}$. Sia $\frac{aadx}{2xx+4ax+2bx+2ab}$, dividendo per 2, ſarà $\frac{\frac{1}{2}aadx}{xx+2ax+bx+2ab}$, cioè $\frac{\frac{1}{2}aadx}{\overline{x+2a}\times\overline{x+b}}$.

Se nel numeratore vi foſſe ſtata la variabile, ed elevata a maggiore poteſtà, che nel denominatore, ſi avrebbe fatta l'attual diviſione, per cui avremmo avuti degl' intieri, e de' rotti; gl'intieri ſi tratterebbero nelle maniere fin'ora ſpiegate; i rotti nella ſeguente.

21. Sia la frazione $\frac{\frac{1}{2}aadx}{\overline{x+2a}\times\overline{x+b}}$, dico; che queſta ſarà eguale a due frazioni, il numeratore delle quali

quali ſia lo ſteſſo di queſta, ed i denominatori ſieno: della prima il prodotto d'una delle radici nella differenza della quantità coſtante dell'altra radice, e della quantità coſtante della radice poſta; della ſeconda ſia il prodotto dell'altra radice nella differenza della coſtante della prima radice, e della coſtante di queſta ſeconda, cioè $\frac{\frac{1}{2}aadx}{\overline{x+2a}\times\overline{x+b}} = \frac{\frac{1}{2}aadx}{\overline{x+2a}\times\overline{b-2a}} + \frac{\frac{1}{2}aadx}{\overline{x+b}\times\overline{2a-b}}$, e ſe le radici foſſero tre, quattro ec. ſi proceda ſempre collo ſteſſo metodo; ed in fatti riducendo al comune denominatore le frazioni in tal guiſa ritrovate, reſtituiranno eſſe la frazione prima onde ſono nate.

Gl'integrali adunque di tali frazioni così ſpezzate, i quali ſaranno ſempre in noſtra mano, ſuppoſta la logaritmica, ſaranno gl'integrali della propoſta formola, e però ſarà

$$\int \frac{\frac{1}{2}aadx}{\overline{x+2a}\times\overline{x+b}} = \frac{\frac{1}{2}a}{2a-b}\, l\overline{x+b} - \frac{\frac{1}{2}a}{2a-b}\, l\overline{x+2a},$$ cioè $\frac{\frac{1}{2}a}{2a-b}\, l\frac{\overline{x+b}}{\overline{x+2a}}$, o ſia $\frac{a}{2a-b}\, l\frac{\sqrt{\overline{x+b}}}{\sqrt{\overline{x+2a}}}$ nella logaritmica della ſottangente $= a$.

Sia $\frac{\frac{1}{4}aadx}{\overline{x+\frac{1}{2}a}\times\overline{x-\frac{1}{2}a}}$: eſſa ſi ſpezzerà nelle

 due

due $\dfrac{\frac{1}{4}aadx}{\overline{x+\frac{1}{2}a}\times\overline{-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a}} + \dfrac{\frac{1}{4}aadx}{\overline{x-\frac{1}{2}a}\times\overline{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a}}$,

cioè $\dfrac{\frac{1}{4}adx}{x-\frac{1}{2}a} - \dfrac{\frac{1}{4}adx}{x+\frac{1}{2}a}$, e però sarà

$\displaystyle\int \dfrac{\frac{1}{4}aadx}{\overline{x+\frac{1}{2}a}\times\overline{x-\frac{1}{2}a}} = \frac{1}{4}\,l\,\overline{\dfrac{x-\frac{1}{2}a}{x+\frac{1}{2}a}}$, o sia $=$

$l\,\dfrac{\sqrt[4]{x-\frac{1}{2}a}}{\sqrt[4]{x+\frac{1}{2}a}}$, nella logaritmica della sottangente $=a$.

Sia $\dfrac{a^3dx}{\overline{x+a}\times\overline{x-b}\times\overline{x+c}}$, essa si spezzerà nelle tre

$\dfrac{a^3dx}{\overline{x+a}\times\overline{-b-a}\times\overline{c-a}} + \dfrac{a^3dx}{\overline{x-b}\times\overline{a+b}\times\overline{c+b}} + \dfrac{a^3dx}{\overline{x+c}\times\overline{a-c}\times\overline{-b-c}}$,

e però sarà $\displaystyle\int \dfrac{a^3dx}{\overline{x+a}\times\overline{x-b}\times\overline{x+c}} = \dfrac{aa}{\overline{a+b}\times\overline{a-c}}\,l\,\overline{x+a}\, +$

$\dfrac{aa}{\overline{a+b}\times\overline{c+b}}\,l\,\overline{x-b} - \dfrac{aa}{\overline{a-c}\times\overline{b+c}}\,l\,\overline{x+c}$ nella logaritmica della sottangente $=a$.

Sia $\dfrac{-a^3dx}{x^3-aax}$, cioè $\dfrac{-a^3dx}{\overline{x+a}\times\overline{x-a}\times\overline{x+0}}$; essa

si

si spezzerà nelle tre

$$\frac{-a^3dx}{\overline{x+a}\times\overline{-2a}\times\overline{o-a}}\quad\frac{-a^3dx}{\overline{x-a}\times\overline{2a}\times\overline{o+a}}\quad\frac{-a^3dx}{\overline{x+o}\times\overline{a-o}\times\overline{-a-o}},$$

cioè $-\frac{adx}{2\times\overline{x+a}}\ -\frac{adx}{2\times\overline{x-a}}\ +\frac{adx}{x}$; e però sarà

$$\int\frac{-a^3dx}{x^3-aax}=lx-\frac{1}{2}l\,\overline{xx-aa}\text{, cioè }=l\frac{x}{\sqrt{xx-aa}}$$

nella logaritmica della sottangente $=a$.

22. Se il denominatore della formola sarà misto di radici eguali, ed ineguali, come per esempio $\frac{a^3dx}{\overline{x-b}^2\times\overline{x+c}}$, allora si consideri la formola, come se fosse $\frac{a^3dx}{\overline{x-b}\times\overline{x+c}}$, e spezzata questa al solito, sarà

$$\frac{a^3dx}{\overline{x-b}\times\overline{x+c}}=\frac{a^3dx}{\overline{x-b}\times\overline{c+b}}+\frac{a^3dx}{\overline{x+c}\times\overline{-b-c}},$$

adunque moltiplicando i denominatori per $x-b$, altra radice della proposta formola, sarà anco

$$\frac{a^3dx}{\overline{x-b}^2\times\overline{x+c}}=\frac{a^3dx}{\overline{x-b}^2\times\overline{c+b}}+\frac{a^3dx}{\overline{x+c}\times\overline{x-b}\times\overline{-b-c}},$$

ma il primo termine dell'omogeneo di comparazione â il denominatore di radici tutte eguali, ed il secondo di radici tutte disuguali; adunque l'uno, e l'altro maneggiato, come si è detto, potremo avere l'integrale di $\frac{a^3dx}{\overline{x-b}^2\times\overline{x+c}}$, il quale sarà in parte algebraico, ed in

in parte logaritmico, cioè $\frac{aa}{\overline{b+c}^2} \, l \, \overline{\frac{x+c}{x-b}} \quad \frac{-a^3}{\overline{x-b} \times \overline{b+c}}$, preso il logaritmo nella logaritmica della sottangente $= a$.

Se le radici eguali saranno in maggior numero, si dovrà nello stesso modo ripetere l'operazione fin che sia necessario.

23. Rimane ora da considerarsi il caso, in cui le frazioni abbiano in oltre nel numeratore la variabile a qualunque potestà, intendendo però sempre, come è stato avvertito di sopra, che la potestà di essa variabile nel numeratore sia minore della massima, che è nel denominatore, e non lo essendo, si riduca tale con l'attual divisione.

In questi casi si tratti la formola nello stesso modo, come se nel numeratore non vi fosse potestà alcuna della variabile, spezzandola nel modo spiegato in altrettante, quante sono le radici del denominatore, indi, se l'esponente della variabile nel numeratore della data formola è di numero dispari, si mutino i segni a' numeratori delle ritrovate frazioni, e se è di numero pari, si lascino ai numeratori quei segni che ânno; di poi ciascun numeratore si moltiplichi per tanta potestà della costante di quella radice, che è nel denominatore, quanta è la potestà della variabile nel numeratore della proposta formola, prefiggendo ad essa costante

ſtante elevata a tale poteſtà quel ſegno, che porta il ſegno naturale, che â nel denominatore.

Sia $\frac{bbxdx}{\overline{x+a}\times\overline{x-a}}$. Conſiderata queſta, come ſe nel numeratore la variabile non vi foſſe, ſi ſpezzerà nelle due $\frac{bbdx}{\overline{x+a}\times\overline{-2a}} + \frac{bbdx}{\overline{x-a}\times\overline{2a}}$; ma perchè nel numeratore vi è la variabile elevata alla poteſtà dell'unità, ſi mutino i ſegni a' numeratori, e ſi moltiplichino relativamente per la coſtante di quella radice, che è nel ſuo denominatore, cioè la prima per a, la ſeconda per $-a$, ed averemo

$$\frac{bbxdx}{\overline{x+a}\times\overline{x-a}} = \frac{-bbdx\times a}{\overline{x+a}\times\overline{-2a}} - \frac{bbdx\times -a}{\overline{x-a}\times 2a},$$

cioè $= \frac{bbdx}{2\times\overline{x+a}} + \frac{bbdx}{2\times\overline{x-a}}$, e però ſarà

$$\int\frac{bbxdx}{\overline{x+a}\times\overline{x-a}} = b\,l\sqrt{x+a} + b\,l\sqrt{x-a},$$ o ſia

$= b\,l\sqrt{xx-aa}$, nella logaritmica della ſottangente $=b$; o pure, ſe ſi vuole, ſarà $=bb\,l\sqrt{xx-aa}$ nella logaritmica della ſottangente $=1$.

Ma era ſuperfluo il ridurre queſta formola alle due frazioni, poichè eſſendo eſſa $\frac{bbxdx}{xx-aa}$, il numeratore è appunto la metà del differenziale del denominatore, e però

però senz' altra operazione l'integrale sarà, come al num. 17. si è detto, $bb\, l \sqrt{xx - aa}$ nella logaritmica della sottangente $= 1$.

Sia $\frac{x^4 dx}{\overline{xx - aa} \times \overline{x + b}}$, cioè $\frac{x^4 dx}{x^3 + bxx - aax - aab}$, e diviso il numeratore per lo denominatore, avremo $xdx - \frac{bx^3 dx + aaxxdx + aabxdx}{x^3 + bxx - aax - aab}$, e diviso di nuovo il termine $-bx^3 dx$ per lo denominatore, avremo $\frac{x^4 dx}{\overline{xx - aa} \times \overline{x + b}} = xdx - bdx + \frac{aaxxdx + bbxxdx - aabbdx}{\overline{xx - aa} \times \overline{x + b}}$.

Ma i due primi termini sono intieri, e l'ultimo non à la variabile nel numeratore, e però si sa maneggiare; adunque rimane da ridursi solamente l'altro termine, cioè $\frac{\overline{aa + bb} \times xxdx}{\overline{xx - aa} \times \overline{x + b}}$.

Considerato questo, come se non avesse la variabile nel numeratore, sarebbe $\frac{\overline{aa + bb} \times dx}{\overline{xx - aa} \times \overline{x + b}} =$
$\frac{\overline{aa + bb} \times dx}{\overline{x + b} \times \overline{-aa + bb}} + \frac{\overline{aa + bb} \times dx}{\overline{x + a} \times \overline{-2ab + 2aa}} + \frac{\overline{aa + bb} \times dx}{\overline{x - a} \times \overline{2ab + 2aa}}$, e per tanto sarà $\frac{\overline{aa + bb} \times xxdx}{\overline{x + b} \times \overline{xx - aa}} = \frac{\overline{aa + bb} \times bbdx}{\overline{x + b} \times \overline{-aa + bb}} +$
$\frac{\overline{aa + bb} \times aadx}{\overline{x + a} \times \overline{-2ab + 2aa}} + \frac{\overline{aa + bb} \times aadx}{\overline{x - a} \times \overline{2ab + 2aa}}$, onde finalmente

te poi $\frac{x^4dx}{\overline{xx-aa}\times\overline{x+b}} = xdx - bdx - \frac{aabbdx}{\overline{x+b}\times\overline{xx-aa}} + \frac{\overline{aa+bb}\times bbdx}{\overline{x+b}\times\overline{-aa+bb}} + \frac{\overline{aa+bb}\times aadx}{\overline{x+a}\times\overline{-2ab+2aa}} + \frac{\overline{aa+bb}\times aadx}{\overline{x-a}\times\overline{2ab+2aa}}$; e ſe vogliamo ſpezzare anche il termine $\frac{-aabbdx}{\overline{x+b}\times\overline{xx-aa}}$, per avere in fine l'integrale della propoſta formola, ſarà $\frac{x^4dx}{\overline{xx-aa}\times\overline{x+b}} = xdx - bdx + \frac{b^4dx}{\overline{x+b}\times\overline{-aa+bb}} + \frac{a^4dx}{\overline{x+a}\times\overline{2aa-2ab}} + \frac{a^4dx}{\overline{x-a}\times\overline{2ab+2aa}}$. Adunque integrando avremo $\int\frac{x^4dx}{\overline{xx-aa}\times\overline{x+b}} = \frac{xx}{2} - bx - \frac{b^4}{aa-bb}\,l\,\overline{x+b} + \frac{a^4}{2aa-2ab}\,l\,\overline{x+a} + \frac{a^4}{2aa+2ab}\,l\,\overline{x-a}$, preſi tali logaritmi nella logaritmica della ſottangente $= 1$.

Così in queſte, come in tutte l'altre integrazioni, che ſi faranno, s'intenda doverſi aggiungere la coſtante, qualora ſarà da me per brevità ommeſſa, il che baſterà d'avere quì avvertito.

24. Ma le formole differenziali poſſono avere, e ſpeſſo ânno denominatori tali, de' quali non ſi poſſono ritrovare algebraicamente le radici, ciò non oſtante però ſerve egualmente bene la regola delle frazioni an-

che in questi casi; imperciocchè si tratti il denominatore, come se fosse un' equazione, e col mezzo delle intersecazioni delle curve si trovino geometricamente in linee i valori della variabile in quella guisa appunto, che si costruiscono i problemi solidi, e tali valori o linee si chiamino A, B, C, ec. coi segni positivi, o negativi secondo, che sono quantità positive, o negative; ciascuno di questi sottratto dalla variabile formerà le radici del denominatore di modo, che la proposta formola differenziale si convertirà in una di questa forma $\frac{x^n dx}{\overline{x-A} \times \overline{x+B} \times \overline{x-C} \text{ ec.}}$, e sopra di questa nello stesso modo si operi, come si è operato nel caso delle radici algebraiche.

25. E' facile a vedersi, che l'addotta regola serve solamente nel caso, che le radici del denominatore sieno tutte reali, perchè altrimenti essendo, spezzata la formola in altre frazioni, tante di queste sarebbero immaginarie, ed in conseguenza immaginarj gl'integrali, quante sono le radici immaginarie nel denominatore della proposta formola differenziale.

26. Quando adunque il denominatore delle proposte formole differenziali sia composto di radici immaginarie o in tutto, o in parte, fa d'uopo ricorrere ad altre maniere; ed in primo luogo abbiano le date for-

mole

mole il denominatore di due sole dimensioni, cioè di due radici immaginarie, e sia per esempio $\frac{bbdx}{xx+aa}$.

L'integrale di questa formola, e di tutte l'altre simili dipende dalla rettificazione, o quadratura del circolo: dissi rettificazione, o quadratura, poichè data l'una, è vicendevolmente data l'altra.

Sia pertanto (*Fig.* 4.) il quadrante di circolo ACG, il raggio $AC=a$, CD tangente $=x$, sarà $AB=\frac{aa}{\sqrt{aa+xx}}$, $CB=a\ \frac{-aa}{\sqrt{aa+xx}}$, ed $EB=\frac{ax}{\sqrt{aa+xx}}$.

Condotta AK infinitamente prossima ad AD, sarà EO la flussione, o differenza dell'arco CE; e tirata dal punto O la retta OM parallela ad EB, ed EH parallela ad AC, sarà HE la differenziale di CB, HO la differenziale di EB, e però $EH=\frac{aaxdx}{\overline{aa+xx}^{\frac{3}{2}}}$, ed $HO=\frac{a^3dx}{\overline{aa+xx}^{\frac{3}{2}}}$; adunque l'archetto $EO=\sqrt{\overline{HE}^2+\overline{HO}^2}$ sarà $=\sqrt{\frac{a^6dx^2+a^4xxdx^2}{\overline{aa+xx}^3}}=\frac{aadx}{aa+xx}$; adunque l'integrale della formola $\frac{aadx}{aa+xx}$ sarà l'arco CE della tangente $CD=x$, e del raggio $CA=a$.

Ripiglio ora la formola $\frac{bbdx}{aa + xx}$: moltiplicando il numeratore, e denominatore per aa, sarà essa $\frac{bb}{aa} \times \frac{aadx}{aa + xx}$; ma l'integrale di $\frac{aadx}{aa + xx}$ è l'arco di circolo, che abbia per tangente la x, ed il raggio $= a$, sarà adunque $\int \frac{bbdx}{aa + xx}$ = al quarto proporzionale di aa, di bb, e dell'arco di circolo col raggio $= a$, tangente $= x$.

Sia la formola $\frac{aamdx}{nxx + nab}$: come che moltiplicando il numeratore, e denominatore per b, equivale a quest' altra $\frac{am}{nb} \times \frac{abdx}{xx + ab}$, sarà $\int \frac{aamdx}{nxx + nab}$ = al quarto proporzionale di nb, di am, e dell'arco di circolo col raggio $= \sqrt{ab}$, e tangente $= x$; e lo stesso si dica di tutte l'altre simili.

27. Per l'opposto sarà adunque il differenziale di un'arco qualunque di circolo il prodotto del quadrato del raggio nella differenza della tangente diviso per la somma del quadrato dello stesso raggio, e del quadrato della tangente.

E come agl'altri integrali, o sommatorie devesi aggiungere sempre la costante, così a questi ancora di rettificazioni di circolo, per avere le sommatorie compite, devesi aggiungere un'arco costante dello stesso

circolo,

circolo, imperciocchè la differenza per cui può crescere, o calare l'arco così composto del fluente, e del costante, non sarà mai altro che il differenziale dell' arco fluente; adunque ad esso differenziale può competere per integrale la somma dell'arco fluente con qualunque arco costante del medesimo circolo. Supponiamo, che sia $= x$ la tangente d'un'arco del raggio $= a$, e sia b la tangente di un'altro arco costante del medesimo circolo; si sa, che la tangente della somma di questi due archi (num. 108. Lib. I.) sarà $= \frac{aab + aax}{aa - bx}$, ma il differenziale di questa moltiplicato nel quadrato del raggio, ed il prodotto diviso per lo quadrato del raggio più il quadrato della stessa tangente si trova essere $\frac{aadx}{aa + xx}$, che è il differenziale dell'arco fluente; adunque ec.

Se fosse la formola $\frac{aadx}{aa + xx - 2bx + bb}$, essendo $xx - 2bx + bb$ un quadrato, si faccia $x - b = z$, e sostituendo avremo $\frac{aadz}{aa + zz}$, e però $\int \frac{aadz}{aa + zz} =$ all'arco di circolo del raggio $= a$, tangente $= z$, ma $z = x - b$; adunque $\int \frac{aadx}{aa + xx - 2bx + bb} =$ all'arco di circolo del raggio $= a$, tangente $= x - b$, qualora però sia x maggiore di b; ma presa x minore di b, l'integrale sarà $-$ arco di circolo col medesimo raggio, e tangente;

ed

ed in fatti differenziando, averemo $\frac{aadx}{aa + bb - 2bx + xx}$, la stessa formola di prima.

Sia proposta la formola $\frac{4abdx + 3bxdx}{xx - 4ax + 6aa}$. Si faccia sparire il secondo termine nel denominatore col porre $x = y + 2a$. Fatte le sostituzioni, sarà $\frac{4abdy + 3bydy + 6abdy}{yy + 2aa}$, cioè $\frac{10abdy}{yy + 2aa} + \frac{3bydy}{yy + 2aa}$.

L'integrale del primo termine sarà adunque il terzo proporzionale di a, di $5b$, e dell'arco di circolo col raggio $= \sqrt{2aa}$, tangente $= y$; del secondo sarà $l\,\overline{yy + 2aa}^{\frac{3}{2}}$ nella logaritmica della sottangente $= b$. Adunque restituendo in luogo della y il suo valore $x - 2a$, l'integrale della formola $\frac{4abdx + 3bxdx}{xx - 4ax + 6aa}$ sarà il quarto proporzionale di a, $5b$, e dell'arco di circolo col raggio $= \sqrt{2aa}$, tangente $= x - 2a$, con di più $l\,\overline{xx - 4ax + 6aa}^{\frac{3}{2}}$ nella logaritmica della sottangente $= b$.

28. Passando ora a quelle formole differenziali, che contengono segni radicali, cioè quantità elevate a potestà di esponente rotto, se la formola sarà, o si potrà

ridurre

ridurre ad esser tale, che l'incognita sotto il segno non ecceda la prima dimensione, e fuori del segno sia potestà positiva, allora saranno esse sempre algebraicamente integrabili, e si avranno le integrazioni col servirsi d'una semplicissima sostituzione, cioè col porre la quantità sotto il segno eguale ad una nuova variabile.

6. Sia per tanto $adx\sqrt{ax-aa}$. Si ponga $\sqrt{ax-aa}=z$, e però $x=\frac{zz+aa}{a}$, $dx=\frac{2zdz}{a}$, e fatte le sostituzioni, avremo $2zzdz$, ed integrando $\frac{2z^3}{3}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, sarà $\frac{2}{3}\times\overline{ax-aa}^{\frac{3}{2}}$ l'integrale della proposta formola.

Se la formola fosse stata $\frac{adx}{\sqrt{ax-aa}}$, procedendo nello stesso modo averemmo per integrale $2\times\overline{ax-aa}^{\frac{1}{2}}$. Sia $xdx\sqrt[4]{a-x}$; posta $\sqrt[4]{a-x}=z$, e però $x=a-z^4$, $dx=-4z^3dz$, e fatte le sostituzioni, avrassi $-4az^4dz+4z^8dz$, ed integrando $-\frac{4az^5}{5}+\frac{4z^9}{9}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, sarà $-\frac{4a}{5}\times\overline{a-x}^{\frac{5}{4}}+\frac{4}{9}\times\overline{a-x}^{\frac{9}{4}}$.

Se

Se la formola fosse stata $\frac{xdx}{\sqrt[4]{a-x}}$, procedendo nello stesso modo avrebbesi per integrale
$-\frac{4a}{3}\times\overline{a-x}^{\frac{3}{4}}+\frac{4}{7}\times\overline{a-x}^{\frac{7}{4}}$.

Sia $xxdx\sqrt{a+x}$; posta $\sqrt{a+x}=z$, e però $x=zz-a$, $dx=2zdz$, $xx=\overline{zz-a}^{2}$, e fatte le sostituzioni, avremo $\overline{zz-a}^{2}\times 2zzdz$, cioè $2z^{6}dz-4az^{4}dz+2aazzdz$, ed integrando, $\frac{2z^{7}}{7}-\frac{4az^{5}}{5}+\frac{2aaz^{3}}{3}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, sarà finalmente $\frac{2}{7}\times\overline{a+x}^{\frac{7}{2}}-\frac{4a}{5}\times\overline{a+x}^{\frac{5}{2}}+\frac{2aa}{3}\times\overline{a+x}^{\frac{3}{2}}$ l'integrale cercato.

Se la formola fosse $\frac{xxdx}{\sqrt{a+x}}$, sarebbe l'integrale
$\frac{2}{5}\times\overline{a+x}^{\frac{5}{2}}-\frac{4a}{3}\times\overline{a+x}^{\frac{3}{2}}+2aa\times\overline{a+x}^{\frac{1}{2}}$.

Sia $xdx\sqrt{\overline{a+x}^{3}}$, cioè $xdx\times\overline{a+x}^{\frac{3}{2}}$: posta al solito $\overline{a+x}^{\frac{3}{2}}=z$, e però $x=z^{\frac{2}{3}}-a$, $dx=\frac{2}{3}z^{\frac{2}{3}-1}dz$,

e fatte

e fatte le sostituzioni, sarà $z^{\frac{2}{3}} - a \times \frac{2z^{\frac{2}{3}} dz}{5}$, cioè $\frac{2z^{\frac{4}{3}}}{3} dz - \frac{2az^{\frac{2}{3}}}{3} dz$, ed integrando, $\frac{2z^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{2az^{\frac{5}{3}}}{5}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, sarà $\frac{2}{7} \times \overline{a+x}^{\frac{7}{2}} - \frac{2a}{5} \times \overline{a+x}^{\frac{5}{2}}$.

Se la formola fosse $\frac{xdx}{\overline{a+x}^{\frac{3}{2}}}$, averemmo per integrale $2\sqrt{a+x} + \frac{2a}{\sqrt{a+x}}$.

29. Generalmente: sia $ax^t dx \times \overline{a+x}^{\frac{m}{n}}$, e sieno gli esponenti t, m, n numeri intieri positivi; posta al solito $\overline{a+x}^{\frac{m}{n}} = z$, e però $a+x = z^{\frac{n}{m}}$, $dx = \frac{n}{m} z^{\frac{n-1}{m}} dz$, $x^t = \overline{z^{\frac{n}{m}} - a}^{\,t}$, e fatte le sostituzioni, la formola sarà $\overline{z^{\frac{n}{m}} - a}^{\,t} \times \frac{an}{m} z^{\frac{n}{m}} dz$, e fatta attualmente la potestà t, ciascun termine, come è chiaro, sarà algebraicamente integrabile, ne' quali termini integrati restituito in luogo di z il valore dato per x, averemo l'integrale algebraico della proposta formola.

30. Se l'esponente m fosse negativo di modo, che la quantità sotto il segno passasse nel denominatore, nel qual caso l'esponente m viene ad essere positivo; cioè la formola fosse $\frac{ax^t dx}{\overline{a+x}^{\frac{m}{n}}}$, fatte le stesse sostituzioni, averemmo $\overline{z^{\frac{n}{m}} - a}^{\,t} \times \frac{an}{m} z^{\frac{n}{m}-2} dz$, e fatta attualmente la potestà t, sarebbe pure ogni termine algebraicamente integrabile, salvi que' casi, ne' quali s'insinui la potestà $z^{-1} dz$, che obbliga a' logaritmi.

Ma se l'esponente t sarà negativo, non saranno algebraicamente integrabili le due suddette formole, saranno bensì libere da' radicali, e ridotte alle quadrature del circolo, e dell'iperbola, come si vedrà a suo luogo.

31. Ma quand'anche la variabile sotto il segno sia elevata a qualunque potestà maggiore dell'unità, purchè la quantità fuori del segno sia la precisa differenziale, o una proporzionale qualunque alla differenziale della quantità sotto il segno, per mezzo della stessa semplicissima sostituzione si avranno gl'integrali delle formole differenziali, i quali integrali saranno sempre algebraici, e però

Sia $2xdx \sqrt{xx + aa}$. Pongo $\sqrt{xx + aa} = z$, onde $xx + aa = zz$, $2xdx = 2zdz$, e fatte le sostituzioni, avremo

avremo $2zzdz$, ed integrando $\frac{2z^3}{3}$, e restituendo il valore di z dato per x, sarà $\frac{2}{3} \times \overline{xx + aa}^{\frac{3}{2}}$.

Se la formola fosse $\frac{2xdx}{\sqrt{xx + aa}}$, averemmo per integrale $2\sqrt{xx + aa}$.

Sia $\overline{2adx - 4xdx}\sqrt{ax - xx + bb}$, cioè $2 \times \overline{adx - 2xdx}\sqrt{ax - xx + bb}$. Pongo $\sqrt{ax - xx + bb} = z$, e però $ax - xx + bb = zz$, ed $adx - 2xdx = 2zdz$, e fatte le sostituzioni, averemo $4zzdz$, ed integrando $\frac{4z^3}{3}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, sarà $\frac{4}{3} \times \overline{ax - xx + bb}^{\frac{3}{2}}$.

Se la formola fosse $\frac{2adx - 4xdx}{\sqrt{ax - xx + bb}}$, averemmo per integrale $4 \times \overline{ax - xx + bb}^{\frac{1}{2}}$.

Sia $\overline{xxdx - \frac{2}{3}axdx}\sqrt[4]{x^3 - axx}$, cioè $\frac{3xxdx - 2axdx}{3}\sqrt[4]{x^3 - axx}$. Pongo $\sqrt[4]{x^3 - axx} = z$, e però $z^4 = x^3 - axx$, e $3xxdx - 2axdx = 4z^3 dz$, e

 fatte

fatte le sostituzioni, averemo $\frac{4z^4dz}{3}$, ed integrando; $\frac{4z^5}{15}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, sarà $\frac{4}{15} \times \overline{x^3 - axx}^{\frac{5}{4}}$.

Se la formola fosse stata $\frac{3xxdx - 2axdx}{3\sqrt[4]{x^3 - axx}}$, averemmo per integrale $\frac{4}{9} \times \overline{x^3 - axx}^{\frac{3}{4}}$.

Sia $2xdx \sqrt[3]{\overline{xx + aa}^2}$, cioè $2xdx \times \overline{xx + aa}^{\frac{2}{3}}$; pongo $\overline{xx + aa}^{\frac{2}{3}} = z$, e però $xx + aa = z^{\frac{3}{2}}$, e $2xdx = \frac{3}{2} z^{\frac{3}{2} - 1} dz$, e fatte le sostituzioni, averemo $\frac{3}{2} z^{\frac{3}{2}} dz$, ed integrando $\frac{3}{5} z^{\frac{5}{2}}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, $\frac{3}{5} \times \overline{xx + aa} \sqrt[3]{\overline{xx + aa}^2}$.

Se la formola fosse $\frac{2xdx}{\sqrt[3]{\overline{xx + aa}^2}}$, averemmo per integrale $3\sqrt[3]{xx + aa}$.

Sia

Sia generalmente la formola $px^{m-1}dx \times \overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}$, in cui p, ed m possono anche essere numeri rotti: pongo $\overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}} = z$, e però $z^{\frac{u}{n}} = x^m + a^m$, ed $mx^{m-1}dx = \frac{u}{n} z^{\frac{u}{n}-1} dz$, e fatte le sostituzioni, avremo $\frac{pu}{mn} z^{\frac{u}{n}} dz$, ed integrando, $\frac{pu}{mu + mn} \times z^{\frac{u+n}{n}}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, averemo per integrale $\frac{pu}{mu + mn} \times \overline{x^m + a^m} \times \overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}$.

Se n fosse negativo, cioè se la formola fosse $\frac{px^{m-1}dx}{\overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}}$, in cui n è positivo, averemmo per integrale $\frac{pu}{mu - mn} \times \overline{x^m + a^m}^{\frac{u-n}{u}}$.

Quindi formeremo la regola generale, che l'integrale di tali formole sarà la quantità sotto al segno, accrescendo dell'unità l'esponente, e dividendola per esso esponente così accresciuto, o pure l'integrale sarà un proporzionale di questo, secondo la proporzione, che averà la quantità differenziale fuori del segno al differenziale preciso.

32.

32. Ma più generalmente ancora: sia la formola $px^{rm-1}dx \times \overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}$, supposto però r numero intiero, e positivo. Essa equivale a quest' altra $px^{rm-m} \times x^{m-1}dx \times \overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}$; pongo al solito $z = \overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}$, e però $x^m + a^m = z^{\frac{u}{n}}$, ed $mx^{m-1}dx = \frac{u}{n} z^{\frac{u}{n}-1} dz$; e perchè $x^m = z^{\frac{u}{n}} - a^m$, sarà pure $x^{rm-m} = \overline{z^{\frac{u}{n}} - a^m}^{r-1}$. Fatte adunque le sostituzioni, averemo $p \times \overline{z^{\frac{u}{n}} - a^m}^{r-1} \times \frac{u}{mn} z^{\frac{u}{n}} dz$. Ma posto r numero intiero, e positivo, sarà pure $r-1$ intiero, e positivo, adunque fatta attualmente la potestà $r-1$, ciascun termine sarà algebraicamente integrabile, nel qual integrale restituito in luogo di z il valore dato per x, averemo l'integrale della proposta formola.

Se n fosse negativo, cioè se la formola fosse $\frac{px^{rm-1}dx}{\overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}}$, in cui n è positivo, fatte le sostituzioni,

sarebbe

sarebbe $p \times \overline{z^{\frac{u}{n}} - a^m}^{\,r-1} \times \frac{u}{mn} z^{\frac{u-2}{n}} dz$ parimente integrabile, e però ec.

Se in tutti questi casi la quantità sotto il vincolo in luogo di essere $x^m + a^m$ fosse $x^m - a^m$, o pure $a^m - x^m$, si proceda nello stesso modo, che ciò nulla turba l'operazione.

Con questo metodo troveremo per tanto, che sarà

$$\int ax^{m-1} dx \sqrt{e + fx^m} = \frac{2a}{3mf} \times \overline{e + fx^m}^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{ax^{m-1} dx}{\sqrt{e + fx^m}} = \frac{2a}{mf} \times \overline{e + fx^m}^{\frac{1}{2}}$$

$$\int ax^{2m-1} dx \sqrt{e + fx^m} = -\frac{\overline{4e + 6fx^m}}{15mff} \times a \times \overline{e + fx^m}^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{ax^{2m-1} dx}{\sqrt{e + fx^m}} = -\frac{\overline{4e + 2fx^m}}{3mff} \times a \times \overline{e + fx^m}^{\frac{1}{2}}$$

$$\int ax^{3m-1} dx \sqrt{e + fx^m} = a \times \frac{\overline{16ee - 24efx^m + 30ffx^{2m}}}{105f^3 m} \times \overline{e + fx^m}^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{ax^{3m-1} dx}{\sqrt{e + fx^m}} = \frac{\overline{16ee - 8efx^m + 6ffx^{2m}}}{15mf^3} \times a \times \overline{e + fx^m}^{\frac{1}{2}},$$

e così

e così di mano in mano quanti altri si vuole.

33. Ancora nel caso, che la variabile fuori del segno sia nel denominatore, la formola sarà algebraicamente integrabile col mezzo di due sostituzioni, purchè l'esponente di essa variabile fuori del segno abbia una condizione, cioè la formola sia $\dfrac{dx \times \overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}}{x^{rm + \frac{mn}{u} + 1}}$. Si faccia

$x = \dfrac{aa}{y}$, $dx = -\dfrac{aady}{yy}$, $x^m = \dfrac{a^{2m}}{y^m}$, $\overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}} = \dfrac{\overline{a^{2m} + a^m y^m}^{\frac{n}{u}}}{y^{\frac{mn}{u}}}$. Fatte le sostituzioni, sarà la formola

$$\frac{-aady \times \overline{a^{2m} + a^m y^m}^{\frac{n}{u}}}{yy \times y^{\frac{mn}{u}} \times \dfrac{a^{2rm + \frac{2mn}{u} + 2}}{y^{rm + \frac{mn}{u} + 1}}}$$

cioè $$\frac{\overline{a^{2m} + a^m y^m}^{\frac{n}{u}}}{a^{2rm + \frac{2mn}{u}}} \times -y^{rm-1}dy,$$

formola, che â le condizioni quì sopra ricercate, e che per mezzo della sostituzione notata (num. 32.) s'integrerà algebraicamente.

Se

Se fosse proposta la formola $\frac{a^5 dx}{x^4 \sqrt{ax + xx}}$, cioè

$\frac{a^5 dx}{x^{\frac{9}{2}} \sqrt{a + x}}$, avendo questa le condizioni ricercate, sarà algebraicamente integrabile, e ciò si osservi d'altre ancora.

34. Ma quì avvertasi, che nella formola generale la u può anche essere eguale all'unità, nel qual caso la potestà di $x^m + a^m$ sarà razionale, cioè intera.

Anche in questo caso, supposta la n quantità negativa, (giacchè quando è positiva non involve difficoltà alcuna) si può fare uso della stessa sostituzione, e del medesimo metodo, con cui troveransi gl'integrali delle formole, i quali integrali però non saranno sempre algebraici, anzi per lo più dipenderanno in parte dalla quadratura dell'iperbola, cioè dalla logaritmica.

Col noto metodo adunque troveremo, che

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{\overline{x^m + a^m}^{\,2}} = -\frac{1}{m} \times \overline{x^m + a^m}^{\,-1}$$

$$\int \frac{x^{2m-1} dx}{\overline{x^m + a^m}^{\,2}} = \frac{1}{m} \, l\,\overline{a^m + x^m} + \frac{a^m}{m \times \overline{a^m + x^m}}$$

$$\int \frac{x^{3m-1} dx}{\overline{x^m + a^m}^{\,2}} = \frac{a^m + x^m}{m} - \frac{2a^m \, l\,\overline{a^m + x^m}}{m} - \frac{a^{2m}}{m \times \overline{a^m + x^m}}$$

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\overline{a^m + x^m}^{\,3}} = \frac{-1}{2m \times \overline{a^m + x^m}^{\,2}}$$

$$\int \frac{x^{2m-1}dx}{\overline{a^m + x^m}^{\,3}} = \frac{-1}{m \times \overline{a^m + x^m}} + \frac{a^m}{2m \times \overline{a^m + x^m}^{\,2}}$$

$$\int \frac{x^{3m-1}dx}{\overline{a^m + x^m}^{\,3}} = \frac{1}{m} l\overline{a^m + x^m} + \frac{2a^m}{m \times \overline{a^m + x^m}} - \frac{a^{2m}}{2m \times \overline{a^m + x^m}^{\,2}},$$

e quant' altri ſi vuole.

35. Ma è bene molto diverſa la facenda allora quando le propoſte formole differenziali, che contengono radicali, non ſono tali, che la quantità fuori del ſegno abbia quelle condizioni da me quì ſopra accennate. Queſte formole potranno ſempre liberarſi dai radicali, purchè un ſolo ne contengano, il quale ſia di radice quadrata, e la incognita ſotto di eſſo non ecceda la ſeconda dimenſione; ma per queſte fa d'uopo di qualche rifleſſione nella ſcelta delle ſoſtituzioni da farſi, acciò ſi liberino da' ſegni radicali; il che fatto, ſi paſſa alle integrazioni, o algebraiche, o dipendenti dalle quadrature del circolo, e dell' iperbola nelle maniere ſpiegate, ſe alle date regole ſaranno ſottopoſte; ſe no, ſi rapporteranno ad altri canoni, che ſono per dare in breve.

Se adunque la radicale della propoſta formola foſſe $\sqrt{ax \pm xx}$, o pure $\sqrt{xx \pm ax}$, eſſa radicale ſi ponga

ga $= \frac{xz}{b}$, intendendo per z una nuova variabile, e per b una coſtante qualunque.

Se la radicale foſſe $\sqrt{xx \pm aa}$, ſi ponga la radicale $= x + z$, ovvero, ſe ſi vuole, $= x - z$.

Se la radicale foſſe $\sqrt{aa - xx}$, o ſia $\sqrt{fp - xx}$ ſi ponga la radicale $= \sqrt{fp} + \frac{xz}{b}$, o pure $= \sqrt{fp} - \frac{xz}{b}$. Da queſte così fatte equazioni ſi ricavi il valore di x, e di dx, che ſi averanno dati per z, e le coſtanti; queſti valori ſi ſoſtituiſcano nelle date formole, e ſi averanno libere dai ſegni radicali altre formole date per z, nelle ſommatorie delle quali, ſe ſi potranno avere, reſtituito il valore di z dato per x, ſi averanno le ſommatorie delle formole propoſte.

36. Se la quantità aveſſe tre termini, cioè il quadrato della variabile col rettangolo di eſſa nella coſtante, e di più il termine tutto coſtante, allora o ſi levi il ſecondo termine nella ſolita maniera dell'algebra carteſiana, o pure, ſe il termine coſtante è poſitivo, come ſe foſſe $\sqrt{xx + ax + aa}$, comunque ſieno poſitivi, o negativi gl'altri, purchè non ſia immaginaria la quantità, ſi faccia $\sqrt{xx + ax + aa} = a + \frac{xz}{b}$; e ſe il ter-

mine costante è negativo, come a dire $\sqrt{xx + ax - aa}$, si faccia $\sqrt{xx + ax - aa} = x + z$.

Da ciò si vede, che tutto l'artifizio consiste in paragonare la quantità radicale ad una tale quantità composta della data variabile, e di una nuova colle costanti, sicchè ne risulti un' equazione, da cui si possa avere il valore di x, e di dx libero da' segni radicali.

Sia proposta da sommarsi la formola differenziale $x^3 dx \sqrt{ax - xx}$. Pongo $\sqrt{ax - xx} = \frac{xz}{b}$, e però $a - x = \frac{xzz}{bb}$, cioè $x = \frac{abb}{zz + bb}$, e $dx = -\frac{2abbzdz}{(zz + bb)^2}$, $x^3 = \frac{a^3 b^6}{(zz + bb)^3}$, e $\sqrt{ax - xx} = \frac{xz}{b} = \frac{abz}{zz + bb}$. Fatte le sostituzioni nella proposta formola, sarà essa $-\frac{2a^5 b^9 zzdz}{(zz + bb)^6}$, formola bensì libera da' segni radicali, ma che però, ciò non ostante, non si sa coi dati metodi maneggiare rispetto alle sommazioni.

Sia $\frac{aadx}{x\sqrt{ax + xx}}$. Pongo $\sqrt{ax + xx} = \frac{xz}{b}$, e però sarà $x = \frac{abb}{zz - bb}$, $dx = -\frac{2abbzdz}{(zz - bb)^2}$, $\sqrt{ax + xx} = \frac{xz}{b} = \frac{abz}{zz - bb}$.

Fatte

Fatte le ſoſtituzioni nella propoſta formola, ſarà eſſa $-\frac{2adz}{b}$, ed integrando, $-\frac{2az}{b}$, e reſtituendo in luogo di z il valore dato per x, ſarà $\int\frac{aadx}{x\sqrt{ax+xx}} = -\frac{2a\sqrt{ax+xx}}{x}$.

Sia $\frac{xdx}{\sqrt{ax+xx}}$. Pongo $\sqrt{ax+xx} = \frac{xz}{b}$, e fatte le neceſſarie ſoſtituzioni, come quì ſopra, la formola ſarà $-\frac{2ab^3dz}{\overline{zz-bb}^2}$, cioè $-\frac{2ab^3dz}{\overline{z+b}^2 \times \overline{z-b}^2}$, ma queſta già ſi ſa maneggiare con la regola delle frazioni, ed avrà per ſommatoria $\frac{abz}{zz-bb} + \frac{1}{2}a\,l\,\frac{z-b}{z+b}$ nella logaritmica della ſottangente eguale all'unità; e reſtituendo in luogo di z il valore dato per x, ſarà $\int\frac{xdx}{\sqrt{ax+xx}} = \sqrt{ax+xx} + \frac{a}{2}\,l\,\frac{\sqrt{ax+xx}-x}{\sqrt{ax+xx}+x}$ nella logaritmica della ſteſſa ſottangente $= 1$.

Sia $\frac{xdx}{\sqrt{xx+ax-aa}}$. Pongo $\sqrt{xx+ax-aa} = x+z$, e però ſarà $x = \frac{zz+aa}{a-2z}$, $dx = \frac{2azdz-2zzdz+2aadz}{\overline{a-2z}^2}$, e $\sqrt{xx+ax-aa} = x+z = \frac{aa+az-zz}{a-2z}$. Fatte le ſo-

ſtitu-

ſtituzioni, ſarà la propoſta formola $\frac{\overline{zz+aa}\times 2dz}{\overline{a-2z}^2}$, cioè $\frac{2zzdz+2aadz}{\overline{a-2z}^2}$, ed integrando, il che per le date regole ſi può fare, $\frac{5aa}{4\times\overline{a-2z}} - \frac{a+2z}{4} + \frac{a}{2}\, l\, \overline{a-2z}$ nella logaritmica della ſottangente $= 1$, e reſtituendo in luogo di z il valore dato per x, ſarà finalmente

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{xx+ax-aa}} = \frac{5aa}{4\times\overline{a+2x-2\sqrt{xx+ax-aa}}} - \frac{a-2x+2\sqrt{xx+ax-aa}}{4} + \frac{2a}{4}\, l\, \overline{a+2x-2\sqrt{xx+ax-aa}}$$

nella logaritmica della ſteſſa ſottangente eguale all' unità.

37. Affatto ſuperflua intorno ad alcune formole differenziali radicali ſarà la fatica di traſmutarle per mezzo dell' accennate ſoſtituzioni in altre libere da' ſegni radicali, e così prepararle per le integrazioni, e ciò per tutte quelle, che di natura ſua involvono quadratura, o rettificazione di circolo; perchè ſebbene ſi convertiranno in altre eſenti da' radicali, queſte però ci porteranno allo ſteſſo circolo. E però ſia (*Fig.* 5.) il ſemicircolo GMD, AD raggio $=a$, $AB=x$, onde $BF=\sqrt{aa-xx}$, e fatta CH infinitamente proſſima a BF,

BF, sarà $BC = dx$, $EF = \frac{xdx}{\sqrt{aa - xx}}$. Adunque l'espressione del rettangolo infinitesimo $BCHE$ sarà $dx\sqrt{aa - xx}$, e però $\int dx\sqrt{aa - xx}$ = allo spazio $ABFM$. Sarà pure $\frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$ l'espressione dell'archetto infinitesimo FH, e però $\int \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$ = all'arco MF. E se l'archetto FH si moltiplicherà per la metà del raggio, sarà $\frac{aadx}{2\sqrt{aa - xx}}$ espressione del settore infinitesimo AFH, e però $\int \frac{aadx}{2\sqrt{aa - xx}}$ = al settore AFM.

Sia ora, nel medesimo circolo, $DC = x$, e $CB = dx$, sarà $CH = \sqrt{2ax - xx}$, $EF = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Pertanto $\int dx\sqrt{2ax - xx}$ sarà = allo spazio HCD. Così $\int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$ = all'arco HD, e $\int \frac{aadx}{2\sqrt{2ax - xx}}$ = al settore AHD. In queste adunque sarà superflua la fatica; imperciocchè nel primo caso pongo $\sqrt{aa - xx} = a - \frac{xz}{b}$, e però

rò $x = \frac{2abz}{zz + bb}$, $dx = \frac{2ab^3 dz - 2abzzdz}{\overline{zz + bb}^2}$; $\sqrt{aa - xx} = a - \frac{xz}{b} = \frac{abb - azz}{zz + bb}$. Fatte le sostituzioni, sarà $\frac{adx}{\sqrt{aa - xx}} = \frac{2abdz}{zz + bb}$, formola di rettificazione di circolo, la di cui tangente $= z$, come già si è veduto al num. 26.

Sarà pure $\frac{aadx}{2\sqrt{aa - xx}} = \frac{aabdz}{zz + bb}$, formola, che involve la stessa rettificazione.

Istessamente sarà $dx\sqrt{aa - xx} = \frac{2aabdz \times \overline{bb - zz}^2}{\overline{zz + bb}^3}$, formola, che sebbene non si sa per ora maneggiare, si vedrà però in appresso dipendere dallo stesso circolo.

Nel secondo caso pongo $\sqrt{2ax - xx} = \frac{xz}{b}$, e però $x = \frac{2abb}{zz + bb}$, $dx = -\frac{4abbzdz}{\overline{zz + bb}^2}$, e $\sqrt{2ax - xx} = \frac{xz}{b} = \frac{2abz}{zz + bb}$. Fatte le sostituzioni, sarà $\frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}} = -\frac{2abdx}{zz + bb}$, rettificazione di circolo.

Sarà pure $\frac{aadx}{2\sqrt{2ax - xx}} = -\frac{aabdz}{zz + bb}$, rettificazione di circolo come sopra.

Istessa-

Iſteſſamente ſarà $dx\sqrt{2ax-xx} = -\frac{8aab^3zzdz}{\overline{zz+bb}^3}$,
che involve lo ſteſſo circolo.

38. Se le noſtre formole differenziali ſaranno compoſte di due quantità radicali, l'operazione ſarà in queſto caſo raddoppiata, ma ſuccederà egualmente bene, purchè nelle quantità radicali manchi, o ſia tolto il ſecondo termine, e la formola ſia moltiplicata per una poteſtà diſpari dell'incognita; e ciò col porre una delle quantità radicali eguale ad una nuova variabile, e così la propoſta formola ſarà ridotta ad un'altra, che conterrà una ſola radicale, e che per conſeguenza ſi maneggierà nella ſolita maniera.

Sia per eſempio $\frac{x^3dx\sqrt{aa+xx}}{\sqrt{bb+xx}}$. Pongo $\sqrt{aa+xx}=y$,
e però $xx=yy-aa$, $xdx=ydy$. Fatte le ſoſtituzioni, ſarà $\frac{yydy\times\overline{yy-aa}}{\sqrt{yy-aa+bb}}$, cioè $\frac{y^4dy}{\sqrt{yy-aa+bb}} - \frac{aayydy}{\sqrt{yy-aa+bb}}$,
ciaſcheduna delle quali ſi ſa maneggiare.

39. Per poco, che ſi rifletta a queſta maniera di operare, è facile a conoſcere, che in queſte formole radicali non ſuccederà di poterle generalmente liberare dal vincolo radicale, ſe non quando ſia radice quadrata, e la incognita ſotto il vincolo non ecceda la ſeconda dimenſione. Diſſi generalmente,

 perchè

perchè in parecchj casi succede la facenda, qualunque siasi il segno radicale, e qualunque la potestà dell'incognita sotto il segno, e certamente in tutti i casi compresi dalle due seguenti formole, la prima delle quali sarà $\frac{dy \times \overline{y^m + b^m}^{\pm \frac{1}{n}}}{y^{tm+1}}$, in cui m, n, t sono numeri intieri, e positivi, e possono anche essere zero, e ciò s'ottiene facendo $\overline{y^m + b^m}^{\frac{1}{n}} = z$, e però $y^m = z^n - b^m$, $dy = \frac{nz^{n-1}dz}{my^{m-1}}$, onde fatte le sostituzioni, sarà $\frac{nz^{n-1}dz \times z^{\pm 1}}{my^{tm+m}}$, cioè $\frac{nz^{n-1}dz \times z^{\pm 1}}{my^{\overline{t+1} \times m}}$, ma $y^{\overline{t+1} \times m} = \overline{z^n - b^m}^{t+1}$, e quando t sia numero intiero, sarà intiera la potestà $t+1$; adunque la proposta formola sarà libera da' radicali.

Se t fosse negativo, la formola sarebbe il caso di sopra considerato al numero 32., che â integrale algebraico.

Negl' altri casi l'integrale dipenderà dalle quadrature del circolo, e dell' iperbola, come si vedrà a suo luogo.

La seconda formola è $y^n dy \times \overline{y^m + b^m}^{\pm \frac{t}{p}}$, la quale,

quale, quando ſia $\frac{n+1}{m}$ numero intiero, ſi potrà ſempre liberare da' ſegni radicali, o in tutto, o almeno da' radicali di quantità compleſſe, il che baſta. Si faccia per tanto $\overline{y^m + b^m}^{\frac{t}{p}} = z$, e però ſarà $y^m = z^{\frac{p}{t}} - b^m$, $y = \overline{z^{\frac{p}{t}} - b^m}^{\frac{1}{m}}$, $dy = \frac{\frac{p}{t} z^{\frac{p}{t}-1} dz \times \overline{z^{\frac{p}{t}} - b^m}^{\frac{1}{m}-1}}{m}$, ed $y^n = \overline{z^{\frac{p}{t}} - b^m}^{\frac{n}{m}}$, e fatte le ſoſtituzioni, averemo la formola $\frac{p z^{\frac{p}{t}-1} dz}{tm} \times z^{\pm 1} \times \overline{z^{\frac{p}{t}} - b^m}^{\frac{1}{m} + \frac{n}{m} - 1}$, ma quando ſia $\frac{n+1}{m}$ numero intiero, ſarà ſempre intiera la poteſtà $\frac{1+n}{m} - 1$, adunque la formola non avrà mai ſegni radicali di quantità compleſſe. E però quando ſia $\frac{1+n}{m} - 1$ numero intiero, e poſitivo, l'integrale al più dipenderà dalla quadratura dell' iperbola, o ſia dalla logaritmica, e ſi potrà avere per le regole date; e quando ſia $\frac{1+n}{m} - 1$ numero intiero negativo, l' integrale dipenderà dalle quadrature del circolo, e dell' iperbola, e ſi averà per le regole da darſi a ſuo luogo.

40. Paſſando ora a quelle formole, che eſſendo

 frazioni

frazioni libere da' radicali, nel denominatore di esse (che suppongo composto di radici immaginarie, poichè in queste sole stà la difficoltà) la incognita sia elevata a qualunque potestà, dico: che ogni qual volta il denominatore sia riducibile in componenti reali, ne' quali la incognita non ecceda la seconda dimensione, si potrà sempre spezzare la formola in tante frazioni, quanti sono i suddetti componenti reali, ciascuna delle quali sarà integrabile, supposte le quadrature del circolo, e dell' iperbola, ed in conseguenza la proposta formola sarà sempre riducibile alle stesse quadrature. Per lo che fare: sia proposta la formola

$$\frac{aadx}{\overline{xx+ax+bb}\times\overline{xx+cx+cb}}$$, si finga un' equazione, cioè, che sia

$$\frac{aadx}{\overline{xx+ax+bb}\times\overline{xx+cx+cb}} = \frac{Axdx+Bdx}{xx+ax+bb} + \frac{Cxdx+Ddx}{xx+cx+cb}$$, nella quale formola le majuscole A, B, C, D sono costanti arbitrarie da determinarsi nel progresso.

Così se fosse la formola

$$\frac{abdx}{\overline{xx+ax+bb}\times\overline{xx\pm aa}\times\overline{x\pm c}}$$, si faccia

abdx

$$\frac{abdx}{\overline{xx+ax+bb}\times\overline{xx\pm aa}\times\overline{x\pm c}} = \frac{Axdx+Bdx}{xx+ax+bb} + \frac{Cxdx+Ddx}{xx\pm aa} + \frac{Hdx}{x\pm c}$$

; e coll'isteſſo ordine ſi proceda, ſe i componenti del denominatore foſſero in maggior numero. Il che fatto, ſi riducano allo ſteſſo denominatore i termini di queſte equazioni, e finalmente con la traſpoſizione ſi riduca l'equazione al zero, indi col paragone de' primi termini al zero ſi ritroverà il valore dalla aſſunta A; col paragone de' ſecondi, terzi, quarti ec. ſi troveranno i valori delle aſſunte B, C, D, ec. dati per le coſtanti della propoſta formola, i quali valori ſoſtituiti in luogo delle majuſcole A, B, C, D ec. nella equazione, ci ſomminiſtreranno tante frazioni, le quali equivagliono alla propoſta, ed in fatti, ridotte al comune denominatore, appunto reſtituiranno la formola da prima propoſta.

Prendiamone un' eſempio. Sia propoſta da integrarſi la formola $\frac{aadx}{\overline{xx+2ax-aa}\times\overline{xx+aa}}$.

Fingo adunque, che ſia

$$\frac{aadx}{\overline{xx+2ax-aa}\times\overline{xx+aa}} = \frac{Axdx+Bdx}{xx+2ax-aa} + \frac{Cxdx+Ddx}{xx+aa}.$$

Riduco adunque al comune denominatore l'equazione, indi col traſportare il termine $aadx$, la riduco

al

al zero, e si trova essere

$$\begin{matrix} Ax^3dx + Bxxdx + Aaaxdx + Baadx \\ Cx^3dx + Dxxdx + 2Daxdx - Daadx \\ + 2Caxxdx - Caaxdx - aadx \end{matrix} = 0 .$$

Per tanto dal paragone de' primi termini al zero si averà $A + C = 0$, cioè $A = -C$; de' secondi $B + D + 2Ca = 0$, cioè ponendo $-A$ in luogo di C, $B = 2Aa - D$; de' terzi $Aaa + 2Da - Caa = 0$, cioè $C = A + \frac{2D}{a}$; degl' ultimi $Baa - Daa - aa = 0$, cioè ponendo in luogo di B il valore dato per D, e per A, sarà $D = Aa - \frac{1}{2}$; adunque sarà $C = \frac{3Aa - 1}{a}$, ma $C = -A$, e però $A = \frac{1}{4a}$, $D = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{3}{4}$, $C = -\frac{1}{4a}$, onde avremo finalmente

$$\frac{aadx}{\overline{xx + 2ax - aa} \times \overline{xx + aa}} = \frac{xdx + 3adx}{4a \times \overline{xx + 2ax - aa}} - \frac{xdx - adx}{4a \times \overline{xx + aa}} .$$

Ma l'omogeneo di comparazione, facendo sparire ove fa d'uopo il secondo termine dal denominatore, è integrabile con le quadrature del circolo, e dell' iperbola, il di cui integrale con le date regole si troverà essere $\frac{1}{4a} l \sqrt{xx + 2ax - aa} + \frac{1}{2\sqrt{2aa}} l \sqrt{x + a - \sqrt{2aa}} - \frac{1}{2\sqrt{2aa}} l \sqrt{x + a + \sqrt{2aa}} - \frac{1}{4a} l \sqrt{xx + aa}$, sottraendo in

in oltre da questi logaritmi il quarto proporzionale di $4aa$, dell' unità, e dell'arco di circolo, che abbia il raggio $= a$, e la tangente $= x$. Adunque l'integrale di questa formola non dipende da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell'iperbola.

41. Se in oltre la frazione sarà moltiplicata in una qualunque potestà dell'incognita, la quale potestà sia positiva, come se fosse l'equazione

$$\frac{aax^n\, dx}{\overline{xx + 2ax - aa} \times \overline{xx + aa}}\text{, si faccia}$$

$$\frac{aax^n\, dx}{\overline{xx + 2ax - aa} \times \overline{xx + aa}} = \frac{Ax^{n+1}dx + Bx^n\, dx}{xx + 2ax - aa} + \frac{Cx^{n+1}dx + Dx^n\, dx}{xx + aa}$$, e si trovino nello stesso modo, come sopra, i valori delle majuscole A, B, C ec., o pure si operi, come se la detta potestà non vi fosse, e le risultanti frazioni si moltiplichino per la stessa potestà, ed avremo parimenti altrettante frazioni, che non esiggeranno quadrature superiori a quelle del circolo, e dell'iperbola, e che si sapranno maneggiare colle date regole.

42. E se la potestà della variabile sarà negativa, cioè, se sarà positiva nel denominatore, per questa potestà si moltiplichino tutti i denominatori delle frazioni risultanti, e saranno della seguente forma.

Sia

Sia per esempio $\dfrac{x^{-n}dx}{\overline{xx+ax+bb}\times\overline{xx\pm aa}\times\overline{x\pm c}}$; risoluta questa, come se non vi fosse la x^{-n}, ed indi moltiplicando ogni termine per x^{-n}, sarà

$$\frac{x^{-n}dx}{\overline{xx+ax+bb}\times\overline{xx\pm aa}\times\overline{x\pm c}} = \frac{Axdx+Bdx}{\overline{xx+ax+bb}\times x^{n}} + \frac{Cxdx+Ddx}{\overline{xx\pm aa}\times x^{n}} + \frac{Hdx}{\overline{x\pm c}\times x^{n}}$$

, intendendo già per le majuscole que' tali valori ritrovati con la data maniera, che rendano la somma di queste frazioni eguale alla proposta.

L'ultima frazione non avrà bisogno d'altro artifizio, perchè si saprà integrare colle date regole.

Quanto alla prima: sia per chiarezza d'esempio $A = aa$, $B = abb$, onde si esprima così $\dfrac{aaxdx+abbdx}{\overline{xx+ax+bb}\times x^{n}}$, si faccia

$$\frac{aaxdx+abbdx}{\overline{xx+ax+bb}\times x^{n}} = \frac{Mxdx+Ndx}{xx+ax+bb} + \frac{Px^{n-1}dx+Hx^{n-2}dx+Ex^{n-3}dx \text{ ec.}}{x^{n}}$$

così proseguendo fino, che l'ultimo termine sia costante, cioè zero la potestà dell'incognita x. Ridotte queste frazioni al comune denominatore, e ridotta al zero l'equazione,

zione, averemo, come s'è fatto di sopra, i valori delle majuscole. Lo stesso si faccia rispetto all'altra frazione $\frac{Cxdx + Ddx}{xx \pm aa \times x^n}$, e troverassi finalmente l'integrale della propoſta formola.

E però generalmente, supposte le sole quadrature del circolo, e dell' iperbola, si potrà sempre avere l'integrale della formola $\frac{x^{\pm n} dx}{\overline{xx + ax + bb} \times \overline{xx \pm aa} \times \overline{x \pm c} \text{ ec.}}$, comunque sieno i componenti reali del denominatore, purchè in essi la incognita non ecceda la seconda dimensione.

43. Ma se il denominatore della proposta formola, o frazione non sarà risoluto ne' suoi componenti reali, ne' quali l'incognita non ecceda la seconda dimensione, nè tale si potrà ridurre colle regole ordinarie dell' algebra, si potrà sempre però con un poco d'artifizio ridurlo tale, ogni qual volta egli sia una formola convertibile, o pure il prodotto di più formole convertibili. Formole convertibili chiamerò quelle, nelle quali la variabile abbia il massimo numero delle sue dimensioni pari affermativo, quale sia per esempio n, l'ultimo termine sia a^n, indi i termini equidistanti da quello di mezzo abbiano il medesimo coefficiente, ed affetto dal medesimo segno, supplite le dimensioni colla costante,

da cui è formato l'ultimo termine; tale sarebbe la formola $x^6 + a^6$, o pure l'altra $x^4 + bx^3 + ccxx + aabx + a^4$, o l'altra $x^6 - bx^5 + b^3 x^3 - a^4 bx + a^6$. Che se fosse $x^5 + bx^4 + a^4 x + a^4 b$, si scriva essa nell'equivalente forma $\overline{x^4 + a^4} \times \overline{x + b}$, in cui $x^4 + a^4$ è formola convertibile, ed $x + b$ è lineare, che non apporta difficoltà alcuna. Lo stesso s'intenda d'infinite altre.

44. Abbiasi ora adunque $x^m - a^m$ da risolvere in componenti reali, ne' quali x non ecceda la seconda dimensione, e che non abbia esponenti rotti, e sia in primo luogo m numero intiero affermativo pari. In tal caso sarà egli divisibile in $x^{\frac{1}{2}m} + a^{\frac{1}{2}m}$, ed $x^{\frac{1}{2}m} - a^{\frac{1}{2}m}$ senza frazione negl'esponenti, per essere m numero intiero pari. Il primo divisore si risolverà per le regole, che si daranno fra poco per il binomio $x^m + a^m$. Il secondo $x^{\frac{1}{2}m} - a^{\frac{1}{2}m}$, se $\frac{1}{2}m$ sarà numero pari, si risolverà nuovamente in $x^{\frac{1}{4}m} + a^{\frac{1}{4}m}$, ed $x^{\frac{1}{4}m} - a^{\frac{1}{4}m}$ senza frazione negl' esponenti. Ma se $\frac{1}{2}m$ sarà numero dispari, si risolverà per le regole da prescriversi per il binomio $x^m - a^m$ quando m è numero dispari.

Sia in secondo luogo $x^m + a^m$, e sia m numero intiero affermativo pari, nel qual caso la formola è con-

convertibile. Si supponga $x^m + a^m = 0$, indi si formi una formola convertibile, in cui il massimo esponente di x sia $m-2$, e che abbia tutti i termini, e l'ultimo termine sia a^{m-2}, ed il coefficiente del secondo termine sia per esempio b, quello del terzo sia cc, quello del quarto d^3 ec., e questa si paragoni al zero, onde ne risulti un'equazione. Tale equazione si moltiplichi per $xx + fx + aa$; il prodotto sarà un'altra equazione convertibile, in cui l'esponente massimo di x sarà $= m$. Questa equazione si paragoni termine per termine coll'equazione fittizia $x^m + a^m = 0$, in cui i coefficienti de' termini intermedj sono $= 0$, e cavando dal paragone de' secondi termini il valore dell'assunta b, dal paragone de' terzi il valore dell' assunta cc, da quello de' quarti il valore dell' assunta d^3, e così fino al termine di mezzo, compreso anche questo (giacchè di là dal medio l'altre equazioni tornerebbero le medesime, per essere le equazioni, che si paragonano, convertibili) da quest'ultimo si caverà il valore di f espresso con una equazione, che avrà numero $\frac{m}{2}$ dimensioni, di cui tutte le radici saranno reali, e ci daranno i valori di f, che sostituiti nel trinomio $xx + fx + aa$ daranno altrettanti trinomj, il prodotto de' quali restituirà il proposto binomio $x^m + a^m$.

Sia $x^4 + a^4$. Prendo un' equazione convertibile del

secondo grado $xx + bx + aa = 0$, la moltiplico per $xx + fx + aa = 0$, e ne ricavo un' altra equazione convertibile $\begin{matrix} x^4 + bx^3 + 2aaxx + aafx + a^4 \\ + fx^3 + bfxx + aabx \end{matrix} = 0$. Paragono questa con la fittizia $x^4 + a^4 = 0$, e dal paragone de' secondi termini trovo $b + f = 0$, cioè $b = -f$; dal paragone de' termini di mezzo trovo $2aa + bf = 0$, e sostituito in luogo di b il suo valore $-f$, trovo $ff - 2aa = 0$, onde $f = \pm \sqrt{2aa}$.

Sia $x^6 + a^6$. Prendo l'equazione convertibile $x^4 + bx^3 + ccxx + aabx + a^4 = 0$, la moltiplico per $xx + fx + aa = 0$, e ne risulta l'equazione

$$\begin{matrix} x^6 + bx^5 + ccx^4 + 2aabx^3 + a^4xx + a^4fx + a^6 \\ + fx^5 + bfx^4 + fccx^3 + aabfxx + a^4bx \\ + aax^4 \qquad\qquad + aaccxx \end{matrix} = 0.$$

Paragono questa con la fittizia $x^6 + a^6 = 0$, e dal paragone de' secondi termini trovo $b + f = 0$; dal paragone de' terzi trovo $cc + bf + aa = 0$, cioè sostituendo il valore di b, $cc - ff + aa = 0$; dal paragone de' medj trovo $2aab + fcc = 0$, cioè sostituendo in luogo di b, e di cc i suoi valori, $f^3 - 3aaf = 0$.

Facendo attualmente queste operazioni si troverà adunque, che

Se $m = 4$, sarà $ff - 2aa = 0$.
Se $m = 6$, sarà $f^3 - 3aaf = 0$.
Se $m = 8$, sarà $f^4 - 4aaff + 2a^4 = 0$.

Se

Se $m = 10$, sarà $f^5 - 5aaf^3 + 5a^4f = 0$.

Se $m = 12$, sarà $f^6 - 6aaf^4 + 9a^4ff - 2a^6 = 0$.

Se $m = 14$, sarà $f^7 - 7aaf^5 + 14a^4f^3 - 7a^6f = 0$,

e così si può procedere per gli altri valori pari di m.

In luogo di $x^4 + a^4$, sia $x^4 + 2bx^3 + 2aabx + a^4$, formola pure convertibile. Moltiplico l'equazione convertibile $xx + hx + aa = 0$ per $xx + fx + aa = 0$, ed averò, come sopra,

$$\begin{array}{l} x^4 + hx^3 + 2aaxx + aafx + a^4 \\ \quad + fx^3 + hfxx + aahx \end{array} = 0.$$

Paragono questa con l'equazione fittizia $x^4 + 2bx^3 + 2aabx + a^4 = 0$, e dal paragone de' secondi termini trovo $h + f = 2b$, cioè $h = 2b - f$; dal paragone de' medj trovo $2aa + hf = 0$, e sostituendo in luogo di h il suo valore, si â $2aa + 2bf - ff = 0$, cioè $ff - 2bf - 2aa = 0$.

Sia $x^6 + a^3x^3 + a^6$. Prendo l'equazione convertibile $x^4 + bx^3 + ccxx + aabx + a^4 = 0$; la moltiplico per $xx + fx + aa$, ed avrò

$$\begin{array}{l} x^6 + bx^5 + ccx^4 + 2aabx^3 + a^4xx + a^4fx + a^6 \\ \quad + fx^5 + bfx^4 + ccfx^3 + aabfxx + a^4bx \\ \quad\quad + aax^4 \quad\quad + aaccxx \end{array} = 0.$$

Paragonata questa con l'equazione $x^6 + a^3x^3 + a^6 = 0$, trovo dal paragone de' secondi termini $b + f = 0$; dal paragone de' terzi trovo $cc + bf + aa = 0$, e posto in luogo di b il suo valore, sarà $cc - ff + aa = 0$; dal paragone de' medj trovo $2aab + ccf = a^3$, e posti in luogo

luogo di b, e di cc i suoi valori, sarà $f^3 - 3aaf - a^3 = 0$, e così di quant' altri si vuole.

Abbiasi adunque $x^4 + 2bx^3 + 2aabx + a^4$ da risolvere in componenti reali, ne' quali x non abbia esponenti rotti, e non ecceda la seconda dimensione. L'equazione, che deve dare i valori di f, è adunque $ff - 2bf = 2aa$, dalla quale si ricavano i valori di f tutti reali, cioè $f = b + \sqrt{2aa + bb}$, $f = b - \sqrt{2aa + bb}$. Sostituito pertanto ciascuno di questi valori in luogo di f nel trinomio $xx + fx + aa$, troveremo, che $x^4 + 2bx^3 + 2aabx + a^4$ è il prodotto de' due componenti reali $xx + bx + x\sqrt{2aa + bb} + aa$; $xx + bx - x\sqrt{2aa + bb} + aa$. Così se sia $x^6 + aax^4 + a^4xx + a^6 = 0$. Essendo l'equazione, che dà i valori di f, $f^3 - 2aaf = 0$, dalla quale si ânno i valori di f tutti reali, cioè $f = 0$, $f = \sqrt{2aa}$, $f = -\sqrt{2aa}$, sarà $x^6 + aax^4 + a^4xx + a^6$ il prodotto de' trè efficienti reali $xx + aa$, $xx + x\sqrt{2aa} + aa$, $xx - x\sqrt{2aa} + aa$.

Abbiasi $x^{10} + a^{10}$. L'equazione, che deve dare i valori di f, è $f^5 - 5aaf^3 + 5a^4f = 0$, dalla quale si ricavano i valori di f tutti reali, cioè $f = 0$, $f = a\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$,

$$f = -a\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}},\ f = a\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}},\ f = -a\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Sosti-

Sostituito per tanto ogn'uno di questi valori in luogo di f nel trinomio $xx + fx + aa$, si troverà, che $x^{10} + a^{10}$ è il prodotto de' cinque efficienti reali $xx + aa$,

$$xx + ax\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} + aa, \quad xx - ax\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} + aa,$$

$$xx + ax\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} + aa, \quad xx - ax\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} + aa;$$

onde si conclude, che l'integrale di qualunque formola differenziale, il di cui numeratore sia dx moltiplicato in qualunque costante, ed il denominatore di simil natura a questi, che si sono considerati, non dipenderà mai da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell' iperbola, e potrassi avere con le date regole.

45. Sia poi $x^m \pm a^m$ da risolvere, come sopra, e sia m numero intiero affermativo, ma dispari.

La formola si divida per $x \pm a$, ed il quoziente, (che nel primo caso sarà $x^{m-1} - ax^{m-2} + aax^{m-3} - a^3x^{m-4}$ ec. fino all'ultimo termine, che sarà $+ a^{m-1}$; e nel secondo caso sarà $x^{m-1} + ax^{m-2} + aax^{m-3} + a^3x^{m-4}$ ec. fino all'ultimo termine, che sarà $+ a^{m-1}$) si supponga $= 0$, e questa finta equazione, che è convertibile, si paragoni termine per termine col prodotto di una equazione convertibile, in cui il numero delle dimensioni dell'incognita x sia $m - 3$, nel trinomio $xx + fx + aa$, e dal paragone de' secondi termini si caverà

verà il valore dell'affunta, per efempio b, da quello de' terzi il valore di cc, da quello de' quarti il valore di d^3; e finalmente dal paragone de' termini di mezzo fi caveranno i valori di f efpreffi con una equazione di numero $\frac{m-1}{2}$ dimenfioni, della quale tutte le radici faranno reali, e determineranno i valori di f tutti reali, che foftituiti nel trinomio $xx + fx + aa$, verranno a somminiftrarci altrettanti trinomj, che infieme moltiplicati, e moltiplicati per $x \pm a$ reftituiranno la propofta formola $x^m \pm a^m$.

Con quefto metodo fi trovano le infrafcritte equazioni, che fervono per la rifoluzione del binomio $x^m + a^m$ quando m è numero intiero affirmativo difpari.

Se $m = 3$, farà $f + a = 0$.

Se $m = 5$, farà $ff + af - aa = 0$.

Se $m = 7$, farà $f^3 + aff - 2aaf - a^3 = 0$.

Se $m = 9$, farà $f^4 + af^3 - 3aaff - 2a^3f + a^4 = 0$.

Se $m = 11$, farà $f^5 + af^4 - 4aaf^3 - 3a^3ff + 3a^4f + a^5 = 0$.

Se $m = 13$, farà $f^6 + af^5 - 5aaf^4 - 4a^3f^3 + 6a^4ff + 3a^5f - a^6 = 0$.

E così fi può procedere per gli altri valori difpari di m.

Se la formola propofta foffe ftata $x^m - a^m$, effendo m numero intiero affermativo difpari, fatta, come fi è detto, la divifione per $x - a$, le medefime equazioni

ni avrebbero luogo, mutati i segni nel secondo, quarto, sesto termine, ed in tutti gl'altri posti ne' luoghi pari.

46. Se in luogo di $x^m \pm a^m$, posto m numero intiero affermativo dispari, la formola fosse qualunque altra, ma tale, che divisa per $x \pm$ una costante, ciò che ne risulta fosse una formola convertibile, come sarebbe $x^5 + bx^4 - aax^3 - aabxx + a^4x + a^4b$, la quale divisa per $x + b$ dà $x^4 - aaxx + a^4$, trattata quest' ultima al solito, e trovati i valori di f, e sostituiti nel trinomio $xx + fx + aa$, averemo altrettanti trinomj, che insieme moltiplicati, e moltiplicati per $x + b$, restituiranno la proposta formola.

Debba, per esempio, risolversi $x^5 + a^5$ in efficienti reali, ne' quali x non abbia esponenti rotti, e non ecceda la seconda dimensione. L'equazione, che deve dare i valori di f (secondo le cose dette) sarà $ff + af - aa = 0$, dalla quale cavati essi valori di f, che sono $f = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$, e sostituiti in luogo di f nel trinomio $xx + fx + aa$, averemo due trinomj reali $xx - \frac{ax + ax\sqrt{5}}{2} + aa$, ed $xx - \frac{ax - ax\sqrt{5}}{2} + aa$, il prodotto de' quali con $x + a$ restituisce la formola proposta $x^5 + a^5$.

Debba dividersi in efficienti reali la formo-

la $x^5 + bx^4 - aax^3 - aabxx + a^4x + a^4b$, che divisa per $x + b$ ci dà $x^4 - aaxx + a^4$.

L'equazione di f per questa sarà $ff = 3aa$, ed i valori di f saranno $f = \pm \sqrt{3aa}$. Sostituiti questi in luogo di f nel trinomio $xx + fx + aa$, averemo due trinomj reali $xx + x\sqrt{3aa} + aa$, $xx - x\sqrt{3aa} + aa$, il prodotto de' quali con $x + b$ restituisce la proposta formola.

47. Da ciò si conclude, che l'integrale di qualunque formola differenziale, il di cui numeratore sia dx in qualunque costante, ed il denominatore sia di simil natura a questi, che si sono considerati, non dipenderà mai da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell'iperbola, e potrassi avere con le date regole.

48. Ma perchè nelle dimensioni più alte il valore di f dalle equazioni di sopra riferite non può coll'attuale separazione ricavarsi, in questi casi basterà rivolgersi alla costruzione geometrica delle medesime equazioni. Così per ritrovare i componenti di $x^7 + a^7$, ed indi l'integrale della formola $\frac{dx}{x^7 + a^7}$, diviso il denominatore per $x + a$, il quoziente sarà $x^6 - ax^5 + aax^4 - a^3x^3 + a^4xx - a^5x + a^6$. I valori di f per risolvere questa formola sono somministrati dall'equazione $f^3 + aff - 2aaf - a^3 = 0$. Ritrovati per tanto coi metodi

todi soliti dell' algebra, per mezzo dell' intersecazione di due curve, o in altro modo i valori veri, e falsi di f, che saranno tutti reali, per esempio, uno A, l'altro $-B$, l'altro $-C$, la quantità x^7+a^7 sarà il prodotto di $x+a$ in $xx+Ax+aa$ in $xx-Bx+aa$ in $xx-Cx+aa$, e le quantità A, B, C saranno reali, e date; onde si potrà procedere alla integrazione della formola $\frac{dx}{x^7+a^7}$ per le sole quadrature del circolo, e dell' iperbola.

49. Col medesimo artifizio, con cui si trovano le equazioni per risolvere il binomio $x^m \pm a^m$, si possono ritrovare per risolvere il trinomio $x^{2m} \pm 2aax^m + aa$, essendo $2m$ numero intiero affermativo pari; anzi generalmente ogni qual volta si proponga da risolvere una formola, che sia convertibile, o il prodotto di convertibili in lineari, e che non abbia frazioni negl' esponenti, sempre potrà ridursi col metodo di sopra esposto.

Il caso del prodotto di formola convertibile in una lineare l'abbiamo quando m è dispari, ed altrove. Esempio dell' altre sia $x^8+b^4x^4-a^4x^4-a^4b^4$, cioè $\overline{x^4+b^4}\times\overline{x^4-a^4}$, o sia $\overline{x^4+b^4}\times\overline{xx+aa}\times\overline{xx-aa}$. Risoluto per tanto ne' suoi efficienti reali di due dimensioni il divisore x^4+b^4, che sieno per esem-

pio $xx + Ax + bb$, $xx + Bx + bb$, sarà
$\overline{x^4 + b^4} \times \overline{x^4 - a^4} = \overline{xx + Ax + bb} \times \overline{xx + Bx + bb} \times \overline{xx + aa} \times \overline{xx - aa}$.
E se fosse stato $\overline{x^4 + b^4} \times \overline{x^4 + a^4}$, risoluto in oltre $x^4 + a^4$ in $xx + Cx + aa$, ed $xx + Dx + aa$, sarebbe $\overline{x^4 + b^4} \times \overline{x^4 + a^4} =$
$\overline{xx + Ax + bb} \times \overline{xx + Bx + bb} \times \overline{xx + Cx + aa} \times \overline{xx + Dx + aa}$.

50. Per avere l'integrale della formola $\frac{ma^m\, dx}{x^m \pm a^m}$, in cui m esprime un qualunque numero intiero affermativo, si chiamino A, B, C, ec. i valori di f coi loro segni, che servono per la risoluzione del denominatore $x^m \pm a^m$, e si avverta, che di questi valori uno può alle volte essere $= 0$, il che seguirà qualunque volta, essendovi $x^m + a^m$ nella detta formola, sia m un numero della serie 2, 6, 10, 14, 18 ec., e qualunque volta, essendovi $x^m - a^m$ nella data formola, sia m un numero della serie 4, 8, 12, 16 ec.; ciò posto, l'integrale cercato sarà $\pm \frac{A}{a} l \sqrt{xx + Ax + aa} \pm \frac{B}{a} l \sqrt{xx + Bx + aa} \pm \frac{C}{a} l \sqrt{xx + Cx + aa}$ ec., presi tali logaritmi nella logaritmica, di cui la sottangente sia $= a$, aggiungendo, o sottraendo da questo complesso di termini logaritmici (secondo che il segno del termine a^m nel denominatore sarà quello del più, o quello del meno) il doppio della somma di tanti archi di circolo,

colo, quanti sono i valori A, B, C ec., de' quali archi i raggi sieno per ordine $\sqrt{aa - \frac{1}{4}AA}$, $\sqrt{aa - \frac{1}{4}BB}$, $\sqrt{aa - \frac{1}{4}CC}$ ec., le tangenti sieno col medesimo ordine $x + \frac{1}{2}A$, $x + \frac{1}{2}B$, $x + \frac{1}{2}C$ ec. Tale sarà l'integrale della formola $\frac{ma^m\, dx}{x^m + a^m}$, se m sarà numero pari affermativo; ma se nella medesima formola m sarà numero dispari affermativo, converrà aggiungere al tutto il logaritmo di $x + a$, perchè il denominatore â anche la radice reale $x + a$. E se la formola sarà $\frac{ma^m\, dx}{x^m - a^m}$, essendo m numero dispari affermativo, converrà in luogo del logaritmo di $x + a$, aggiungere quello di $x - a$. E se finalmente, essendo la formola $\frac{ma^m\, dx}{x^m - a^m}$, sarà m numero pari affermativo, converrà aggiungere il logaritmo di $x - a$, e sottrarre quello di $x + a$, prendendo sempre anche questi logaritmi nella logaritmica della sottangente $= a$.

51. Ma se nella proposta formola $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$ il numero m fosse intiero negativo, cioè se fosse $\frac{dx}{x^{-m} \pm a^{-m}}$, essa

essa si esprima così $\frac{dx}{\frac{1}{x^m} \pm \frac{1}{a^m}}$, la quale ridotta al cōmune denominatore equivale a questa $\frac{a^m x^m dx}{a^m \pm x^m}$, e dividendo il numeratore per lo denominatore, acciò la massima potestà dell' incognita sia minore in quello, che in questo, si averà finalmente $\pm a^m dx \pm \frac{a^{2m} dx}{x^m \pm a^m}$, in cui m sarà numero positivo, ed averanno luogo le cose dette di sopra anche quando nella formola $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$ sia m numero negativo intiero.

52. Se in oltre la frazione $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$ s' intenderà moltiplicata per x^n, essendo n intiero affermativo, o negativo, risoluto il denominatore ne' suoi efficienti reali, ne' quali x non ecceda la seconda dimensione, sarà essa il caso da me sopra considerato ai num. 41., e 42., e però riducibile alle quadrature del circolo, e dell' iperbola.

53. Ma quando n sia negativo, si potrà più speditamente ridurre così. Sia in primo luogo n minore di m: la formola $\frac{dx}{\overline{x^m + a^m} \times x^n}$ si esprima coll' equivalen-

valente $\frac{dx}{a^m x^n} - \frac{x^{m-n} dx}{a^m \times \overline{x^m + a^m}}$; e $\frac{dx}{\overline{x^m - a^m} \times x^n}$ con la $\frac{-dx}{a^m x^n} + \frac{x^{m-n} dx}{a^m \times \overline{x^m - a^m}}$. Sia in secondo luogo n maggiore di m, la formola $\frac{dx}{\overline{x^m + a^m} \times x^n}$ si esprima con l'equivalente $\frac{dx}{a^m x^n} - \frac{dx}{a^{2m} x^{n-m}} + \frac{dx}{a^{3m} x^{n-2m}} - \frac{dx}{a^{4m} x^{n-3m}}$ ec. fino a quel termine, in cui l'esponente di x sia prossimamente maggiore di m, $\pm$ (secondo, che porterà l'alternativa de' segni) $\frac{dx}{\overline{x^m + a^m} \times a^r x^t}$, dove r è lo stesso esponente della quantità a nel termine antecedente, e la t è il residuo della divisione fatta del numero n per lo numero m quante volte si può.

E se fosse $\frac{dx}{\overline{x^m - a^m} \times x^n}$, supposto pure n maggiore di m, tutti i termini della serie dovranno essere affetti dal segno negativo, ed il termine fuori della serie, cioè il termine $\frac{dx}{\overline{x^m - a^m} \times a^r x^t}$ dovrà avere sempre prefisso il segno affermativo. Data adunque la formola

la $\frac{dx}{\overline{x^3+a^3} \times x^5}$, sarà essa $= \frac{dx}{a^3x^5} - \frac{dx}{\overline{x^3+a^3} \times a^3xx}$;
ma sappiamo, che $\frac{-dx}{\overline{x^3+a^3} \times a^3xx} = \frac{-dx}{a^6xx} + \frac{xdx}{a^6 \times \overline{x^3+a^3}}$,
adunque sarà $\frac{dx}{\overline{x^3+a^3} \times x^5} = \frac{dx}{a^3x^5} - \frac{dx}{a^6xx} + \frac{xdx}{a^6 \times \overline{x^3+a^3}}$,
quantità tutte, che si sanno maneggiare con le date regole.

54. Ma se m sarà numero rotto affermativo, o negativo, chiamisi t il numeratore della frazione, che è eguale ad m, ridotta che questa sia ai termini semplicissimi, e p il denominatore della medesima; talchè la formola data sia espressa per $\frac{dx}{x^{\frac{t}{p}} \pm a^{\frac{t}{p}}}$; pongasi $x = y^p$, ed $a = b^p$, e la formola si convertirà in $\frac{py^{p-1}dy}{y^t \pm b^t}$, che non â esponenti rotti, onde si può risolvere per le date regole.

Sia adunque, per esempio, la formola $\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}} \pm a^{\frac{3}{2}}}$; pongo $x = yy$, $a = bb$, sarà $dx = 2ydy$, e fatte le sostituzioni, la formola sarà mutata in $\frac{2ydy}{y^3 \pm b^3}$, che non â esponenti rotti.

55. Se poi foſſe data la formola $\frac{x^n\,dx}{x^m \pm a^m}$, in cui m, ed n foſſero numeri rotti, chiamando r il numeratore della frazione n, e p il denominatore di quella, e così chiamando t il numeratore della frazione m, e q il denominatore della medeſima (intendendo, che tali frazioni ſieno ridotte a' termini ſempliciſſimi) la formola ſarà $\frac{x^{\frac{r}{p}}\,dx}{x^{\frac{t}{q}} \pm a^{\frac{t}{q}}}$, in cui r, p, q, t ſaranno numeri intieri poſitivi, o negativi.

Pongaſi ora $x = y^{pq}$, ed $a = b^{pq}$, la formola ſi convertirà in $\frac{pqy^{qr+pq-1}\,dy}{y^{pt} \pm b^{pt}}$, che non â frazioni negli eſponenti. Sia per eſempio la formola $\frac{x^{\frac{3}{2}}\,dx}{x^{\frac{4}{5}} \pm a^{\frac{4}{5}}}$; pongo $x = y^{10}$, $a = b^{10}$, ſarà $dx = 10y^9dy$, $x^{\frac{3}{2}} = y^{15}$, $x^{\frac{4}{5}} = y^8$, e fatte le ſoſtituzioni, ſarà mutata la formola in $\frac{10y^{24}dv}{y^8 \pm \ldots}$, che non â eſponenti rotti.

56. Finalmente ſe ſarà $\frac{x^n\,dx}{\overline{x^m \pm a^m}^{\,u}}$, eſſendo n, m,

ed u numeri intieri positivi, si potrà sempre averne l'integrale, supposte le sole quadrature del circolo, e dell'iperbola, e l'integrale sarà composto di quantità algebraiche, e di una quantità sommatoria, il che si farà nel seguente modo.

Si supponga la formola $\int \frac{x^n dx}{\overline{x^m \pm a^m}^{\,u}} =$

$$\frac{Bx^{n+um-2m+1} + Cx^{n+um-2m} + Dx^{n+um-2m-1} \text{ ec.}}{\overline{x^m \pm a^m}^{\,u-1}}$$

sino al termine costante, cioè sino a quello in cui l'esponente di x sia zero, e sia questo K, indi si aggiunga $A\int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$, cioè si faccia $\int \frac{x^n dx}{\overline{x^m \pm a^m}^{\,u}} =$

$$\frac{Bx^{n+um-2m+1} + Cx^{n+um-2m} + Dx^{n+um-2m-1} \text{ ec.} + K}{\overline{x^m \pm a^m}^{\,u-1}} +$$

$$A\int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}.$$

Si differenzj l'equazione, e si riduca al zero, e si ordinino i termini; dal paragone de' primi al zero troverassi il valore dell'assunta B; dal paragone de' secondi al zero troverassi il valore dell'assunta C; e così di mano in mano il valore dell'altre, i quali valori sostituiti in luogo delle majuscole, comecchè la somma-

toria

toria $\int \frac{x^n . dx}{x^m \pm a^m}$ dipende dalle ſole quadrature del circolo, e dell'iperbola, e gl'altri termini nell'omogeneo di comparazione ſono algebraici, così la propoſta formola non eſiggerà quadrature ſuperiori.

57. Alle volte potrà occorrere, che alcuno de' coefficienti B, C, D ec. ſi trovi arbitrario, ma ſolo allora quando ſia n maggiore di $m - 1$. E ſi noti pure, che ogni qual volta ſia $m = n + 1$, il coefficiente A ſi troverà eguale al zero, ed in conſeguenza algebraico l'integrale della propoſta formola.

58. Ma ſe nella propoſta formola differenziale l'eſponente n foſſe intiero negativo, di modo, che eſſa foſſe $\frac{dx}{x^n \times \overline{x^m \pm a^m}^u}$, in cui ora è poſitivo, l'integrale ſarebbe $\frac{Bx^{um - 2m} + Cx^{um - 2m - 1} + Dx^{um - 2m - 2} \text{ ec.} + K}{x^{n-1} \times \overline{x^m \pm a^m}^{u-1}} +$ $A \int \frac{dx}{x^n \times \overline{x^m \pm a^m}}$ i quali coefficienti B, C, D ec. ſi determineranno nello ſteſſo modo, come ſopra.

Sia adunque per eſempio $\frac{xdx}{\overline{x^3 + a^3}^2}$; in queſto ca-

so si à $n=1$, $m=3$, $u=2$. Sarà pertanto

$$\int \frac{xdx}{\overline{x^3+a^3}^2} = \frac{Bxx+Cx+K}{x^3+a^3} + A\int\frac{xdx}{x^3+a^3}$$, e diffe-

renziando, $\dfrac{xdx}{\overline{x^3+a^3}^2} =$

$$\frac{2Bxdx+Cdx\times\overline{x^3+a^3}-3xxdx\times\overline{Bxx+Cx+K}}{\overline{x^3+a^3}^2}+\frac{Axdx}{x^3+a^3},$$

e riducendo al comun denominatore, ordinando l'equazione, e paragonandola al zero, sarà

$$\begin{array}{llll} 2Bx^4dx+Cx^3dx-3Kxxdx+2Ba^3xdx+Ca^3dx & & & \\ -3Bx^4dx-3Cx^3dx & +Aa^3xdx & & =0, \\ +Ax^4dx & -\quad xdx & & \end{array}$$

e però dal paragone al zero de' primi, secondi, terzi ec. termini, troveremo $A-B=0$, cioè $B=A$, $C=0$, $K=0$, $2Ba^3+Aa^3-1=0$, cioè $Aa^3=1-2Ba^3$, e ponendo A in luogo di B, sarà $A=\dfrac{1}{3a^3}=B$, onde finalmente

$$\int\frac{xdx}{\overline{x^3+a^3}^2}=\frac{xx}{3a^3\times\overline{x^3+a^3}}+\frac{1}{3a^3}\int\frac{xdx}{x^3+a^3}.$$

Ma $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^3+a^3}=\frac{1}{3aa}\times\overline{l\sqrt{xx-ax+aa}-l\overline{x+a}}$

con di più $\dfrac{2}{3aa}$ moltiplicato nell'arco di circolo del rag-

gio $\sqrt{\frac{3aa}{4}}$, tangente $= x - \frac{a}{2}$; adunque farà

$$\int \frac{xdx}{\overline{x^3 + a^3}^2} = \frac{xx}{3a^3 \times \overline{x^3 + a^3}} + \frac{1}{9a^5} l \sqrt{xx - ax + aa} -$$

$\frac{1}{9a^5} l \overline{x + a} + \frac{2}{9a^5} \times$ arco di circolo del raggio $=$ $\sqrt{\frac{3aa}{4}}$, tangente $= x - \frac{a}{2}$, presi i logaritmi nella logaritmica della sottangente $= a$.

59. Ma se l'esponente m fosse negativo, si trasmuti la formola in altra equivalente, in cui l'esponente sia positivo nel modo indicato al num. 51.

60. E se ambi m, ed n fossero rotti, si facciano le sostituzioni del numero 55.

61. Se poi l'esponente u non fosse numero intiero, ma rotto affermativo o negativo, basterà, che la formola sia uno de' casi considerati al numero 39. acciocchè si trasmuti in un' altra capace d'essere maneggiata colle date regole.

Anzi la formola $\frac{x^n dx}{\overline{x^m \pm a^m}^u}$, essendo gl'esponenti n, m, u numeri intieri positivi, o negativi, ed anco in qualunque modo rotti razionali, co' segni del più, o del meno a piacere, sarà integrabile, o almeno riduci-

ducibile alle note quadrature, ogni qualvolta i detti esponenti abbiano tra loro tal proporzione, che una delle due quantità da essi composte, cioè $u - \frac{1}{m} - 1 - \frac{n}{m}$, o pure $\frac{1}{m} - 1 + \frac{n}{m}$ sia eguale ad un numero qualunque intiero. Se questo numero intiero sarà positivo, la formola s'integrerà algebraicamente, salvi que' casi, ne' quali s'insinui la potestà $x^{-1}dx$, che obbliga a' logaritmi. Se questo numero intiero sarà negativo, la formola si ridurrà alle quadrature del circolo, o dell' iperbola.

Per conseguire l'intento rispetto al primo caso di $u - \frac{1}{m} - \frac{n}{m} - 1$ eguale a numero intiero, si faccia $x^m + a^m = zx^m$; dunque $x^m = \frac{a^m}{z-1}$, $x = \frac{a}{\overline{z-1}^{\frac{1}{m}}}$, $x^n = \frac{a^n}{\overline{z-1}^{\frac{n}{m}}}$, $x^{n+1} = \frac{a^{n+1}}{\overline{z-1}^{\frac{1+n}{m}}}$, e però $x^n dx = -\frac{a^{n+1}dz}{m} \times \overline{z-1}^{\frac{-n-1-1}{m}}$; ma $x^m + a^m = zx^m = \frac{a^m z}{z-1}$, ed $\overline{x^m + a^m}^u = \frac{a^{mu}z^u}{\overline{z-1}^u}$, dunque fatte le

dovute

dovute foſtituzioni nella propoſta formola, ſarà eſſa $-\frac{a^{n+1-mu} z^{-u} dz}{m} \times \overline{z-1}^{\frac{-n-1}{m}-1+u}$, la quale manifeſtamente ſi vede, eſſere integrabile algebraicamente (ſalva l'eccezione fatta) quando ſia $\frac{-n-1}{m}-1+u$ eguale a numero poſitivo intero. Che ſe ſia $\frac{-n-1}{m}-1+u$ numero intero, ma negativo, per le coſe dette ne' ſuperiori paragrafi, la ſommatoria della formola non dipenderà da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell' iperbola.

Vengo al ſecondo caſo, cioè di $\frac{1}{m}-1+\frac{n}{m}$ eguale a numero intiero; ſi faccia $x^m+a^m=z$, ſarà dunque $x^m=z-a^m$, $x=\overline{z-a^m}^{\frac{1}{m}}$, $x^n=\overline{z-a^m}^{\frac{n}{m}}$, $x^{n+1}=\overline{z-a^m}^{\frac{1+n}{m}}$, $x^n dx=\frac{dz}{m}\times\overline{z-a^m}^{\frac{n+1}{m}-1}$; ma $x^m+a^m=z$, ed $\overline{x^m+a^m}^{u}=z^u$, dunque fatte le foſtituzioni nella propoſta formola, ſarà eſſa $\frac{dz}{m}\times\frac{\overline{z-a^m}^{\frac{n+1}{m}-1}}{z^u}$, o ſia $\frac{z^{-u}dz}{m}\times\overline{z-a^m}^{\frac{n+1}{m}-1}$, la quale è integrabile algebraicamente (ſalva la ſuddet-

ta

ta eccezione) quando ſia $\frac{n+1-1}{m}$ eguale a numero poſitivo intiero, e quando ſia eguale a numero negativo intiero, la ſommatoria dipenderà dalle note quadrature del circolo, e dell' iperbola, per i ſuperiori paragrafi.

62. Che ſe il denominatore della propoſta frazione elevato a qualunque poteſtà intiera non foſſe un binomio, come ſi è fin' ora conſiderato, ma foſſe un qualunque altro, purchè egli ſia riducibile ne' ſuoi componenti reali, ne' quali la incognita non ecceda la ſeconda dimenſione, o per mezzo delle equazioni convertibili, o in altro modo, ſi potrà ſempre ridurre la formola alle note quadrature.

Imperciocchè ſia per eſempio $\frac{dx}{\overline{xx+bx+aa}^2 \times \overline{x+c}^3}$; fatta attualmente la poteſtà del denominatore, ſi finga un' equazione così, $\frac{dx}{\overline{xx+bx+aa}^2 \times \overline{x+c}^3} + \frac{Ax^3dx + Bxxdx + Cxdx + Ddx}{x^4 + 2bx^3 + 2aaxx + bbxx + 2aabx + a^4} + \frac{Fxxdx + Gxdx + Hdx}{x^3 + 3cxx + 3ccx + c^3}$, ponendo generalmente tanti termini, quanti ſono i componenti del denominatore, ed in eſſi termini tante majuſcole, quanta è la maſſima poteſtà

potestà dell'incognita nel denominatore respettivo, moltiplicando in oltre in ogni termine la prima majuscola per la massima potestà meno uno della incognita del suo denominatore, la seconda majuscola per essa potestà meno due, e così di mano in mano sino all'ultima costante. Con la solita maniera si devono determinare esse costanti assunte, ed il primo termine somministrerà tante frazioni divise per $\overline{xx + bx + aa}^{2}$, nel qual denominatore fatto sparire il termine di mezzo, le frazioni saranno un caso particolare del Canone generale $\dfrac{x^{m}\,dx}{\overline{x^{n} \pm a^{n}}^{u}}$, ed il secondo termine ci darà tante frazioni divise per $\overline{x + c}^{3}$, che si riducono alla regola ordinaria dei denominatori composti di radici eguali.

63. Se in oltre il numeratore della proposta formola sarà moltiplicato per una potestà positiva, o negativa dell'incognita, ritrovati i valori delle majuscole, operando come se la frazione non fosse moltiplicata per essa potestà, i termini risultanti si moltiplichino per la stessa potestà, ed il rimanente si faccia al solito ec.

64. Finisco questo primo Capo con soddisfare alla promessa fatta al Lettore intorno al *Metodo de' Polinomj* del Sig. Conte Jacopo Riccati, che è il seguente.

Col nome di Polinomj differenziali appello le frazioni, che ânno per numeratore la flussione dx, e per

denominatore un aggregato di poteſtà, gl'eſponenti delle quali coſtituiſcano una progreſſione aritmetica, che va a terminarſi nel nulla. E mentre queſta condizione non ſi adempia, biſognerà ſuplire qualche termine affetto dal coefficiente $= 0$. Abbiaſi la eſpreſſione $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + a}$, ſembra a prima viſta un trinomio, ma realmente è un quadrinomio, e va eſpoſta così $\frac{dx}{x^{\frac{3}{6}} + x^{\frac{2}{6}} + 0x^{\frac{1}{6}} + a}$.

In qualunque Polinomio eſpoſto per una frazione, il di cui denominatore ſia alzato alla poteſtà p, numero intiero e poſitivo, âſſi un metodo, che ſarebbe generale, ſe non veniſſe frequentemente reſo inutile dalle quantità immaginarie, ed oltre ciò alcuni artifizj particolari, che tal volta opportunamente ci ſoccorrono.

Do principio dal trinomio $\frac{dx}{\overline{x^{2m} + ax^{m} + b}^{\,p}} = dy$, conciosiacchè a cotale eſpreſſione ogni trinomio facilmente ſi riduce. Facciaſi $x^{m} = z + A$. (E' z una nuova variabile aſſunta, ed A una coſtante da determinarſi) Iſtituiti i neceſſarj computi per giungere alla ſoſtituzione, abbiamo come ſegue

$$\begin{aligned} x^{2m} &= zz + 2Az + AA \\ ax^{m} &= az + aA \\ b &= b, \end{aligned}$$

e per conſeguenza

$$\overline{x^{2m} + ax^{m} + b}^{\,p} = \overline{zz + \overline{2A + a} \times z + AA + aA + b}^{\,p}.$$

Dee

Dee farsi in maniera, che sparischino le quantità $AA + aA + b$, ponendole $= 0$, e ne' casi, in cui A non è quantità immaginaria, succede ottimamente la riduzione. E giacchè $x^m = z + A$, e prese le differenze, $mx^{m-1}dx = dz$, ed $x = \overline{z + A}^{\frac{1}{m}}$, dunque $dx = \frac{dz}{mx^{m-1}} = \frac{dz}{m \times \overline{z + A}^{\frac{m-1}{m}}}$.

In passando alle necessarie sostituzioni, onde nella nostra formola principale in cambio di x, e delle sue funzioni resti surrogata la variabile assunta z colle sue funzioni, troveremo $\frac{dx}{\overline{x^{2m} + ax^m + b}^p} = \frac{dz}{m \times \overline{z + A}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{zz + 2Az + az}^p}$, e liberando la quantità z, che moltiplica il binomio $z + 2A + a$ sotto il segno, sarà

$$\frac{dx}{\overline{x^{2m} + ax^m + b}^p} = \frac{z^{-p}dz}{m \times \overline{z + A}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{z + 2A + a}^p}.$$

Il caso più semplice vuole l'esponente p eguale all' unità, essendo l'altro m qualsivoglia numero intero, o rotto, affermativo, o negativo; e fatto per brevità $2A + a = g$, l'espressione generale passa nella particolare

$$\frac{z^{-1}dz}{g \times \overline{z + A}^{\frac{m-1}{m}} + z \times \overline{z + A}^{\frac{m-1}{m}}} = mdy.$$

Istituisco una prima divisione, partendo cioè il numeratore della frazione per lo suo denominatore, ed il primo

quoziente sarà $\dfrac{z^{-1}dz}{g\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}$, e fatta la moltiplicazione, e la sottrazione, conforme la pratica ordinaria, il residuo sarà $-\dfrac{dz}{g}$, da esser partito per lo denominatore, e perciò

$$\frac{z^{-1}dz}{g\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}+z\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{z^{-1}dz}{g\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}} - \frac{dz}{gg\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}+gz\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}.$$

Il primo termine del secondo membro è già ridotto alle quadrature note, e l'altro termine facilmente vi si riduce, ponendo $z+A=u$, e fatte le debite sostituzioni, avremo

$$\frac{-dz}{gg\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}+gz\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{u^{\frac{-m+1}{m}}du}{gg-gA+gu}.$$

Seguitando la nostra ricerca, sia l'esponente p eguale a qualsivoglia numero positivo, ed intiero: per ottenere l'intento basterà prolungare alquanto l'operazione. Ripigliata per mano la formola generale

$$\frac{dx}{\overline{x^{2m}+ax^m+b}^{\,p}} = \frac{z^{-p}dz}{m\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}\times\overline{z+g}^{\,p}} = dy,$$

e posto, per esempio, $p=$ al binario, si ridurrà alla seguente

$$\frac{z^{-2}dz}{gg\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}+2gz\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}+zz\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}} = mdy.$$

Di-

Dividο, come ſopra, il numeratore di queſte frazioni per lo ſuo denominatore, ed il primo quoziente ſarà $\frac{z^{-2}dz}{gg \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}$, e dopo le neceſſarie operazioni avremo il reſiduo $-\frac{2z^{-1}dz}{g} - \frac{dz}{gg}$ da eſſere nuovamente per l'intero denominatore diviſo. Iſtituiſco una ſeconda diviſione nella frazione

$$\frac{-2z^{-1}dz}{g^3 \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} + 2ggz \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} + gzz \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}},$$

e dopo le debite operazioni ſi averà il reſiduo $\frac{4dz}{g} + \frac{2zdz}{gg}$ da partirſi per l'intiero denominatore. Naſcerà pertanto la ſeguente equazione $\frac{z^{-2}dz}{\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{z+g}^{2}} =$

$$\frac{z^{-2}dz}{gg \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}} - \frac{2z^{-1}dz}{g^3 \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}} + \frac{\overline{4g-1} \times dz}{gg \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{z+g}^{2}} + \frac{2zdz}{gg \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{z+g}^{2}}.$$

I primi due termini nell'omogeneo di comparazione ſono due binomj, e gli altri due poſſono facilmente ridurſi alla forma del binomio, facendo $z+A=u$, ovvero $z+g=u$. Ne' caſi più compoſti, in cui ſi mette $p=3$, 4, 5 ec.

5 ec. cresce il tedio del calcolo, ma il metodo non ci abbandona.

Esso metodo si estende a tutti i polinomj in infinito, mentre p sia numero intiero, e positivo, perchè se fosse negativo, ed intiero, la cosa riesce talmente facile, che non occorre favellarne. Per applicare il metodo altro non si richiede, che replicare la sostituzione $x = z + A$, $z = u + B$, facendo sempre svanire que' termini, ne' quali le sole quantità costanti si ritrovano; laonde, per cagion d'esempio, si riduca il quadrinomio al trinomio, e questo al binomio. In oltre è d'uopo di valersi di tempo in tempo d'una dimezzata divisione, perchè non abbiano a turbarci gli esponenti negativi, che bene spesso ci si presentano nel numeratore della frazione. Fra tanto il modo d'operare si mostra più speditamente cogli esempj, che coi precetti.

Sia il quadrinomio $\dfrac{dx}{\overline{x^{3m} + ax^{2m} + bx^{m} + c}^{\,p}} = dy$. Le costanti a, b possono essere $= 0$. Pongo $x^m = z + A$, ed avrassi

$$\begin{aligned} x^{3m} + ax^{2m} + bx^m + c = z^3 &+ 3Azz + 3AAz + A^3 \\ &+ azz + 2aAz + aAA \\ &+ bz + Ab + c. \end{aligned}$$

Faccio $A^3 + aAA + Ab + c = 0$, e così determino il valore della costante assunta A. Quinci ripetute le operazioni, come nel trinomio, trovo $\dfrac{z^{-p}dz}{\overline{z + A}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{zz + gz + h}^{\,p}}$.

Le spezie g, h sono costanti surrogate in luogo d' altre più composte; e stante, che p è un numero positivo, ed intiero, alzo il trinomio $zz + gz + h$ alla potestà p. Dopo

Dopo ciò intraprendo tante divisioni, quante sieno bastanti, per fare, che laddove nel numeratore ci sia l'esponente negativo, nel denominatore non si rinvenga altra quantità, che il binomio $\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}$, e metto da parte sì fatte frazioni, che, trascurati i coefficienti, saranno analoghe alla seguente $\frac{z^{-n}\,dz}{\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}$, posto n qualsivoglia numero positivo, ed intiero. Gli altri termini sono rappresentati dalla formola generale $\frac{z^n\,dz}{\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{zz+gz+h}^{p}}$.

Ripeto dunque l'operazione, facendo $z = u + B$, indi fatto sparire l'ultimo termine, conforme il solito, ed alzato il binomio $u + B$ alla potestà qualunque $n + 1$, e surrogati in cambio di z, e delle sue funzioni, i valori esposti per la nuova indeterminata u, tutti i membri compariranno sotto l'aspetto espresso dalla seguente formola $\frac{u^{n-p}\,du}{\overline{u+A+B}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{u+k}^{p}}$.

Quando sia p maggiore di n, onde l'esponente $n-p$ sia negativo, si mettano in pratica le divisioni, e la formola indi nascente sarà $\frac{u^{-n}\,du}{\overline{u+A+B}^{\frac{m-1}{m}}}$; essendo poi $n-p$ positivo, avremo $\frac{u^n\,du}{\overline{u+A+B}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{u+k}^{p}}$; e finalmente po-

ponendo $u + k = \omega$, ed essendo tanto n, quanto p numeri intieri, saranno sempre riducibili alle quadrature più semplici i binomj, che nasceranno dalle accennate operazioni.

Egli è vero, che a cagione delle immaginarie il metodo riesce limitato; ma oltrechè bene spesso le radici, o tutte, o in parte sono reali; oltrechè in molti casi particolari possono scansarsi le quantità immaginarie, non bisogna trascurare quel molto, che si può avere, perchè il tutto non può conseguirsi.

Abbiasi per esempio il trinomio $\dfrac{dx}{\overline{x + 2\sqrt{x} + 2}^{\,p}}$.

Faccio $x^{\frac{1}{2}} = z + A$, dunque $x + 2\sqrt{x} + 2 = zz + 2Az + 2z + AA + 2A + 2$. Mettendo $AA + 2A + 2 = 0$, trovo $A = \sqrt{-1} - 1$; ed ecco in campo una grandezza mista di reale, ed immaginario, e procedendo a norma del metodo avremo $\dfrac{z^{-p}\,dz}{\overline{z + A}^{\,-1} \times \overline{z + 2A + 2}^{\,p}} = \dfrac{z^{1-p}\,dz}{\overline{z + 2\sqrt{-1}}^{\,p}} + \dfrac{Az^{-p}\,dz}{\overline{z + 2\sqrt{-1}}^{\,p}}$.

Perchè si tolgano di mezzo le immaginarie, mutiamo maniera, e nella grandezza $zz + \overline{2A + 2} \times z + AA + 2A + 2$ facciamo, che si dilegui il termine di mezzo $2Az + 2z$, ponendolo $= 0$, onde sia $A = -1$, e di più $AA + 2A + 2 = 1$, e la formola sarà, come segue

$\dfrac{dz}{\overline{z - 1}^{\,-1} \times \overline{zz + 1}^{\,p}} = \dfrac{zdz}{\overline{zz + 1}^{\,p}} - \dfrac{dz}{\overline{zz + 1}^{\,p}}$; e ne' due binomj dell'omogeneo di comparazione, che sono equivalenti agl'altri due già considerati, non s'incontra difficoltà.

CAPO

CAPO II.

Delle Regole dell'Integrazioni facendo uso delle Serie.

65. FAcendo ora passaggio all' altra maniera d'integrare nel principio indicata, cioè col mezzo delle serie, è necessario di premettere le seguenti Regole.

Regola I. Ridurre una frazione a serie infinita.

Si divida il numeratore per lo denominatore con la regola ordinaria della divisione, ed il rimanente di nuovo si divida, e così di mano in mano in infinito, e si avrà una serie d'infiniti termini eguale alla proposta frazione. Si avverta però di porre tanto nel numeratore, quanto nel denominatore della frazione proposta per primo termine quello, che sarà il maggiore. Con questo modo operando averemo per tanto

$$\frac{f}{m+n} = \frac{f}{m} - \frac{fn}{mm} + \frac{fnn}{m^3} - \frac{fn^3}{m^4} + \frac{fn^4}{m^5} \text{ ec.}$$

$$\frac{f}{m-n} = \frac{f}{m} + \frac{fn}{mm} + \frac{fnn}{m^3} + \frac{fn^3}{m^4} + \frac{fn^4}{m^5} \text{ ec.}$$

$$\frac{af}{mm \pm nn} = \frac{af}{mm} \mp \frac{afnn}{m^4} + \frac{afn^4}{m^6} \mp \frac{afn^6}{m^8} + \frac{afn^8}{m^{10}} \text{ ec.}$$

cioè coi segni alternativi, quando il secondo termine

del denominatore sia positivo; e tutti positivi, quando sia col segno negativo.

Similmente sarà

$$\frac{f}{mm \pm mn} = \frac{f}{mm} \mp \frac{fn}{m^3} + \frac{fnn}{m^4} \mp \frac{fn^3}{m^5} + \frac{fn^4}{m^6} \text{ ec.}$$

$$\frac{1}{1+xx} = 1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 \text{ ec.}$$

$$\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x} = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13xx + 34x^{\frac{5}{2}} \text{ ec.}$$

$$\frac{f}{\overline{m \mp n}^{\,2}} = \frac{f}{mm} \pm \frac{2fn}{m^3} + \frac{3fnn}{m^4} \pm \frac{4fn^3}{m^5} + \frac{5fn^4}{m^6} \text{ ec.}$$

$$\frac{f}{\overline{m \mp n}^{\,3}} = \frac{f}{m^3} \pm \frac{3fn}{m^4} + \frac{6fnn}{m^5} \pm \frac{10fn^3}{m^6} + \frac{15fn^4}{m^7} \text{ ec.}$$

Sia una frazione, il di cui numeratore, e denominatore sieno due serie infinite, e sia per esempio

$$\frac{1 + \frac{1}{2}axx - \frac{1}{8}aax^4 + \frac{1}{16}a^3x^6 - \frac{5}{128}a^4x^8 \text{ ec.}}{1 - \frac{1}{2}bxx - \frac{1}{8}bbx^4 - \frac{1}{16}b^3x^6 - \frac{5}{128}b^4x^8 \text{ ec.}},$$

sarà essa

$$\begin{aligned} = 1 &+ \tfrac{1}{2}bxx + \tfrac{3}{8}bbx^4 + \tfrac{5}{16}b^3x^6 + \tfrac{35}{128}b^4x^8 \text{ ec.} \\ &+ \tfrac{1}{2}axx + \tfrac{1}{4}abx^4 + \tfrac{3}{16}abbx^6 + \tfrac{5}{32}ab^3x^8 \text{ ec.} \\ &- \tfrac{1}{8}aax^4 - \tfrac{1}{16}aabx^6 - \tfrac{3}{64}aabbx^8 \text{ ec.} \\ &+ \tfrac{1}{16}a^3x^6 + \tfrac{1}{32}a^3bx^8 \text{ ec.} \\ &- \tfrac{5}{128}a^4x^8 \text{ ec.} \end{aligned}$$

66.

66. *Regola* II. Ridurre una quantità compleſſa radicale in ſerie infinita.

Sia per eſempio $\sqrt{aa \pm xx}$. Si eſtragga la radice quadrata dal primo termine, indi ſi proſeguiſca in infinito l'operazione nella ſolita maniera dell'eſtrazione delle radici, e ſi avrà

$$\sqrt{aa \pm xx} = a \pm \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \pm \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{ ec.}$$

$$\sqrt{ax \pm xx} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8a^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16a^{\frac{5}{2}}} - \frac{5x^{\frac{9}{2}}}{128a^{\frac{7}{2}}} \text{ ec.}$$

Si noti, che nell' una, e nell' altra di queſte due ſerie, ſe ſi moltiplicherà per 3 il numeratore, e denominatore di ciaſcun termine, principiando dal quarto, i coefficienti numerici ſaranno nel numeratore per ordine, principiando dal quarto, $3, 3 \times 5, 3 \times 5 \times 7$ ec. nati dalla vicendevole moltiplicazione de' numeri diſpari.

Nel denominatore poi, principiando dal ſecondo, ſaranno $2, 2 \times 4, 2 \times 4 \times 6, 2 \times 4 \times 6 \times 8$ ec. nati dalla vicendevole moltiplicazione de' numeri pari.

67. *Regola* III. Tutto ciò ſi può fare più generalmente per mezzo del ſeguente Canone

$$\overline{P + PQ}^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ \text{ ec.}$$

in cui $P + PQ$ è la quantità data, $\frac{m}{n}$ è l'esponente numerico, P rappresenta il primo termine, Q il rimanente di tutti gl'altri termini divisi per il primo, e ciascuna delle lettere A, B, C, D ec. significano rispettivamente il termine anteriore di modo, che per A s'intenda $P^{\frac{m}{n}}$, per B s'intenda $\frac{m}{n} AQ$, per C s'intenda $\frac{m-n}{2n} BQ$ ec.

Sia da ridursi in serie la formola $\sqrt{aa + xx}$, adunque sarà $P = aa$, $Q = \frac{xx}{aa}$, $m = 1$, $n = 2$, e però

$$\sqrt{aa + xx} = a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{ ec.}$$

Sia $\sqrt[5]{a^5 + a^4 x - x^5}$, cioè $\overline{a^5 + a^4 x - x^5}^{\frac{1}{5}}$, sarà $P = a^5$, $Q = \frac{a^4 x - x^5}{a^5}$, $m = 1$, $n = 5$, e però

$$\overline{a^5 + a^4 x - x^5}^{\frac{1}{5}} = a + \frac{a^4 x - x^5}{5a^4} - \frac{2a^8 xx + 4a^4 x^6 - 2x^{10}}{25a^9} \text{ ec.}$$

Sia $\frac{b}{\sqrt[3]{y^3 - aay}}$, cioè $b \times \overline{y^3 - aay}^{-\frac{1}{3}}$, sarà $P = y^3$, $Q = -\frac{aa}{yy}$, $m = -1$, $n = 3$, e però

Abbiasi da elevare una serie infinita ad una data potestà. E sia per esempio $y + ayy + by^3 + cy^4 + fy^5$ ec. da elevarsi alla potestà m; sarà dunque $P = y$, $Q = ay + byy + cy^3 + fy^4$ ec., $n = 1$, $m = m$, onde averemo

$$\overline{y + ayy + by^3 + cy^4 + fy^5}^{\,m} \text{ ec.} =$$

$$y^m + \frac{may^{m+1}}{1} + \frac{m \times \overline{m-1}\, aay^{m+2}}{1 \times 2} + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3} \times a^3 y^{m+3} + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}\, a^4 v^{m+4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{m}{1} \times by^{m+2} \qquad + \frac{m \times \overline{m-1}\, aby^{m+3}}{1 \times 2} \qquad + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times aaby^{m+4}}{1 \times 2 \times 3} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{mcy^{m+3}}{1} \qquad + \frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2} \times acy^{m+4} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{m \times \overline{m-1}\, bby^{m+4}}{1 \times 2} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{mfy^{m+4}}{1} \text{ ec.}$$

rò $b \times \overline{y^3 - aay}^{-\frac{1}{3}} = \frac{b}{y} + \frac{aab}{3y^3} + \frac{2a^4 b}{9y^5} + \frac{14a^6 b}{81y^7}$ ec.

Se fosse $\frac{b}{\sqrt[5]{\overline{a+x}^3}}$, si esprimerebbe così $b \times \overline{a+x}^{-\frac{3}{5}}$, ed il rimanente si farebbe, come sopra.

Sia $\frac{b}{\overline{a+x}^3}$, cioè $b \times \overline{a+x}^{-3}$, sarà $P = a$, $Q = \frac{x}{a}$, $m = -3$, $n = 1$, e però $b \times \overline{a+x}^{-3} = \frac{b}{a^3} - \frac{3bx}{a^4} + \frac{6bxx}{a^5} - \frac{10bx^3}{a^6}$ ec.

68. Abbiasi, da elevare una quantità complessa ad una data potestà, e sia per esempio $a + x$ da elevarsi alla potestà m, cioè $\overline{a+x}^m$. Sarà $P = a$, $Q = \frac{x}{a}$, $m = m$, $n = 1$, onde $\overline{a+x}^m = a^m + \frac{ma^{m-1}x}{1} + \frac{m \times \overline{m-1} \times a^{m-2}xx}{1 \times 2} + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times a^{m-3}x^3}{1 \times 2 \times 3}$ ec.

Abbiasi ec.

69. Ciò posto: Sia da integrarsi la formola differenziale $\frac{bdx}{a+x}$. Ridotta in serie la frazione $\frac{b}{a+x}$, e moltiplicato ciascun numeratore per dx, avremo

$$\frac{bdx}{a+x} = \frac{bdx}{a} - \frac{bxdx}{aa} + \frac{bxxdx}{a^3} - \frac{bx^3dx}{a^4} + \frac{bx^4dx}{a^5} \text{ ec.},$$

ed integrando

$$\int \frac{bdx}{a+x} = \frac{bx}{a} - \frac{bxx}{2aa} + \frac{bx^3}{3a^3} - \frac{bx^4}{4a^4} + \frac{bx^5}{5a^5} \text{ ec.}$$

70. Sia la formola $\frac{adx}{x}$. Fatta $x = b + z$, intendendo per la b una qualunque costante a piacere, e per z una nuova incognita, sarà $\frac{adx}{x} = \frac{adz}{b+z}$.

Ridotta in serie la frazione $\frac{a}{b+z}$, e moltiplicato ciascun numeratore per dz, sarà

$$\frac{adz}{b+z} = \frac{adz}{b} - \frac{azdz}{bb} + \frac{azzdz}{b^3} - \frac{az^3dz}{b^4} + \frac{az^4dz}{b^5} \text{ ec.},$$

ed integrando $\int \frac{adz}{b+z} = \frac{az}{b} - \frac{azz}{2bb} + \frac{az^3}{3b^3} - \frac{az^4}{4b^4} + \frac{az^5}{5b^5}$ ec., cioè

$$\int \frac{adx}{x} = \frac{a \times \overline{x-b}}{b} - \frac{a \times \overline{x-b}^2}{2bb} + \frac{a \times \overline{x-b}^3}{3b^3} - \frac{a \times \overline{x-b}^4}{4b^4} \text{ ec.}$$

71.

71. Sia la formola $\frac{bdx}{\sqrt[5]{\overline{x+a}^3}}$; ridotta in ſerie, ſarà

$$\frac{bdx}{\sqrt[5]{\overline{a+x}^3}} = \frac{bdx}{a^{\frac{3}{5}}} - \frac{3bxdx}{5a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12bxxdx}{25a^{\frac{13}{5}}} - \frac{52bx^3dx}{125a^{\frac{18}{5}}} \text{ ec.},$$

e però integrando ſarà

$$\int \frac{bdx}{\sqrt[5]{\overline{a+x}^3}} = \frac{bx}{a^{\frac{3}{5}}} - \frac{3bxx}{10a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12bx^3}{75a^{\frac{13}{5}}} - \frac{52bx^4}{500a^{\frac{18}{5}}} \text{ ec.}$$

E così ſi faccia di qualunque altra propoſta formola.

72. Se le ſerie così ritrovate, che eſprimono l'integrale delle propoſte formole differenziali, e comprendono un numero infinito di termini, ſaranno di valore infinito, ſarà infinito l'integrale delle propoſte formole differenziali. E ſe eſſe ſerie ſaranno di valore finito, e di più ſommabili, cioè a dire, che ſi ſappia ritrovare il valore di eſſe ſerie, quantunque compoſte di termini infiniti di numero, il che molte volte ſuccede, ſi avrà in quantità finite, e però algebraiche l'integrale delle propoſte formole differenziali. Ma ſe le ſerie eſſendo di valore finito non ſaranno ſommabili, quanti più termini nella ſerie ſi prenderanno, tanto più ſi accoſterà al giuſto l'integrale della propoſta formola differenziale, ma l'eſatto però verrà eſpreſſo da tutta la ſerie.

73. Per riconoſcere, quali ſieno le ſerie di valore infinito, quali di valore finito, e quali ſommabli, ſi

veda

veda il trattato *De Seriebus Infinitis* del Sig. Giacomo Bernulli, ed altri Autori, che di esse trattano.

74. Ma qualunque volta la formola differenziale sia composta di due soli termini, si può generalmente, e più speditamente far uso del seguente Canone, in cui gl'esponenti m, n, t possono essere intieri, rotti, positivi, e negativi, ed il quale si può produrre a quanti termini si vuole, giacchè da' quattro posti, abbastanza si manifesta la legge, con cui si forma.

CAPO

$$\int ay^{t-1}dy \times \overline{b+cy^n}^{\,m} = \overline{\frac{ay^t}{tb} - \frac{ac}{tbb} \times \frac{\overline{t+mn+n}}{t+n} \times y^{t+n} + \frac{acc}{tb^3} \times \frac{\overline{t+mn+n}}{t+n} \times \frac{\overline{t+mn+2n}}{t+2n} \times y^{t+2n} - \frac{ac^3}{tb^4} \times \frac{\overline{t+mn+n}}{t+n} \times \frac{\overline{t+mn+2n}}{t+2n} \times \frac{\overline{t+mn+3n}}{t+3n} \times y^{t+3n} \text{ ec.}} \times \overline{b+cy^n}^{\,m+1}.$$

La maniera di ritrovare esso canone è questa. Si finga che sia l'equazione

$\int ay^{t-1}dy \times \overline{b+cy^n}^{\,m} = \overline{Ay^t + By^{t+n} + Cy^{t+2n} + Dy^{t+3n} + Ey^{t+4n} \text{ ec.}} \times \overline{b+cy^n}^{\,m+1}$, in cui le assunte A, B, C, D, E ec. sono costanti arbitrarie da determinarsi.

Adunque differenziando la finta equazione, averemo pure

$$ay^{t-1}dy \times \overline{b+cy^n}^{\,m} = \overline{tAy^{t-1}dy + \overline{t+n} \times By^{t+n-1}dy + \overline{t+2n} \times Cy^{t+2n-1}dy + \overline{t+3n} \times Dy^{t+3n-1}dy \text{ ec.}} \times \overline{b+cy^n}^{\,m+1} + \overline{m+1} \times ncy^{n-1}dy \times \overline{b+cy^n}^{\,m} \times \overline{Ay^t + By^{t+n} + Cy^{t+2n} \text{ ec.}},$$

cioè dividendo per $\overline{b+cy^n}^{\,m}$, ed ordinando i termini,

$$\begin{aligned} ay^{t-1}dy = tbAy^{t-1}dy &+ \overline{t+n} \times bBy^{t+n-1}dy + \overline{t+2n} \times bCy^{t+2n-1}dy \text{ ec.} \\ &+ tcAy^{t+n-1}dy + \overline{t+n} \times cBy^{t+2n-1}dy \text{ ec.} \\ &+ \overline{m+1} \times ncAy^{t+n-1}dy + \overline{m+1} \times ncBy^{t+2n-1}dy \text{ ec.}, \end{aligned}$$

e trasportando il termine $ay^{t-1}dy$ dall'altra parte, sarà

$$\left.\begin{aligned} tbAy^{t-1}dy &+ \overline{t+n} \times bBy^{t+n-1}dy + \overline{t+2n} \times bCy^{t+2n-1}dy \text{ ec.} \\ -ay^{t-1}dy &+ tAcy^{t+n-1}dy + \overline{t+n} \times cBy^{t+2n-1}dy \text{ ec.} \\ &+ \overline{m+1} \times ncAy^{t+n-1}dy + \overline{m+1} \times ncBy^{t+2n-1}dy \text{ ec.} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Ridotta adunque al zero l'equazione, saranno pure eguali al zero i coefficienti di ciascun termine; per lo che avremo tante equazioni, quante sono le arbitrarie assunte A, B, C, D ec., con le quali equazioni esse arbitrarie si determineranno. Pertanto sarà $tbA - a = 0$, cioè $A = \frac{a}{tb}$; $\overline{t+n} \times bB + tAc + \overline{m+1} \times ncA = 0$, e sostituendo il valore di A, $tbB + nbB + \frac{ac}{b} + \frac{mnac}{tb} + \frac{nac}{tb} = 0$, cioè $B = \frac{\overline{t+mn+n} \times -ac}{tbb \times \overline{t+n}}$, $\overline{t+2n} \times bC + \overline{t+n} \times cB + \overline{m+1} \times ncB = 0$, cioè $C = \frac{\overline{t+n} \times -cB + \overline{m+1} \times -ncB}{b \times \overline{t+2n}}$, e sostituendo il valore di B, sarà $C = \frac{\overline{t+mn+n} \times \overline{t+mn+2n} \times acc}{tb^3 \times \overline{t+n} \times \overline{t+2n}}$, e così di mano in mano si averanno i valori quanti si vogliono per altrettante assunte costanti, e questi valori posti nella finta equazione ci somministreranno appunto il canone assegnato.

Se gl'esponenti m, n, t della proposta formola saranno tali, che il canone, o sia la serie infinita s'interrompa, cioè che qualche termine diventi $= 0$ (nel qual caso sarebbero $= 0$ tutti gl'altri, che vengono dopo) la serie sarà finita, e terminata, vale a dire algebraico l'integrale della proposta formola differenziale, ma è necessario, che la serie prima s'interrompa nel numeratore, cioè che prima diventi il numeratore $= 0$ del denominatore, perchè se prima sarà $= 0$ il denominatore, quel termine, ed indi gl'altri dopo saranno eguali all'infinito. Acciò che la serie s'interrompa nel numeratore, fa d'uopo che sia $-\frac{t}{n} - m$ eguale ad un numero intiero positivo.

Che se gl'esponenti t, m, n della proposta formola saranno tali, che la serie non s'interrompa mai, allora si muti l'espressione della proposta formola in un'altra equivalente, cioè la formola per esempio $ay^{t-1}dy \times \overline{b+cy^n}^{\,m}$ si muti in quest'altra $ay^{t-1+mn}dy \times \overline{by^{-n}+c}^{\,m}$, che equivale alla prima, e si provi se così si à l'intento, e se no, la formola non sarà algebraicamente integrabile con questo canone. Se la formola fosse $ay^{t-1}dy \times \overline{b-cy^n}^{\,m}$, allora i termini tutti del canone sarebbero positivi.

Sia $\frac{a^5dx\sqrt{bx+xx}}{x^5}$, cioè $a^5x^{-\frac{9}{2}}dx \times \overline{b+x}^{\,\frac{1}{2}}$. Sarà $t - 1 = -\frac{9}{2}$, $n = 1$, $m = \frac{1}{2}$, $c = 1$, onde sarà eguale a zero la quantità $t + mn + 3n$, ed in conseguenza sarà zero il quarto termine, e gl'altri appresso della serie, e però avremo

$$\int \frac{a^5dx\sqrt{bx+xx}}{x^5} = \int a^5x^{-\frac{9}{2}}dx \times \overline{b+x}^{\,\frac{1}{2}} = \overline{-\frac{2a^5x^{-\frac{7}{2}}}{7b} + \frac{2a^5}{7bb} \times \frac{4}{5}x^{-\frac{5}{2}} - \frac{2a^5}{7b^3} \times \frac{8}{15}x^{-\frac{3}{2}}} \times \overline{b+x}^{\,\frac{3}{2}} = -\frac{30a^5bb + 24a^5bx - 16a^5xx}{105b^3x^{\frac{7}{2}}} \times \overline{b+x}^{\,\frac{3}{2}}.$$

Sia $\frac{ady}{yy\sqrt{aa+yy}}$, sarà $t = -1$, $n = 2$, $m = -\frac{1}{2}$, $c = 1$, $b = aa$, e però sarà zero il secondo termine della serie, quindi

$$\int \frac{ady}{yy\sqrt{aa+yy}} = \frac{ay^{-1}}{-aa} \times \overline{aa+yy}^{\,\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{aa+yy}}{ay} \text{ ec.}$$

CAPO III.

Dell' uso delle accennate Regole nelle Rettificazioni delle Curve, Quadrature de' Spazj, Appianazioni delle Superficie, e Cubature de' Solidi.

75. Per fare uso delle sopraccennate regole di calcolo integrale, applicandole alle quadrature de' spazj, rettificazioni di curve, appianazioni, o sia quadrature di superficie, e cubature de' solidi, sia una qualunque curva ADH (*Fig. 6.*) riferita all' asse AB con le ordinate parallele fra loro, ed in angolo retto sopra l' asse stesso. Alla ordinata BD condotta CH parallela, ed infinitamente prossima, e tirata DE parallela a BC, il mistilineo $BDHC$ sarà la flussione, o il differenziale, o sia l'elemento dello spazio ABD, e perchè lo spazio DEH è nullo rispetto al rettangolo $BDEC$, si potrà prendere esso rettangolo per l' elemento del suddetto spazio ABD. Adunque la somma di tutti questi rettangoli infinitesimi $BDEC$ sarà lo spazio compreso dalla curva AD, e dalle coordinate AB, BD. Quindi chiamata $AB = x$, $BD = y$, sarà $BC = dx$, $EH = dy$, ed il rettangolo $BDEC = ydx$ sarà la formola per gli spazj. Se adunque in questa formola sostituiremo in luogo di y il valore dato per x, e per le co-

ſtanti dell'equazione della curva, o in luogo di dx, il valore dato per y, dy, e le coſtanti, ed indi integreremo, ſarà l'integrale il ricercato ſpazio ABD.

Altre eſpreſſioni, o formole poſſono averſi degl' elementi de' ſpazj per mezzo di Settori, o di Trapezj, le quali in certi incontri ſogliono eſſere più comode della riferita; ſe ne vedrà la maniera, e l'uſo in alcuni eſempj.

76. Che ſe la curva ſarà riferita al fuoco, o ſia ad un punto fiſſo, per eſempio M, da cui partano tutte le ordinate; condotta all'ordinata MD la infinitamente proſſima MH, lo ſpazio infiniteſimo MHD ſarà l'elemento dello ſpazio AMD; onde, perchè deſcritto col centro M, raggio MD, l'archetto infiniteſimo DK, lo ſpazietto DKH è nullo riſpetto allo ſpazio MDK, e perchè altresì l'archetto DK ſi può aſſumere per la tangente in D, o in K, ne viene, che lo ſpazio MDK ſarà l'elemento dello ſpazio AMD.

Chiamata per tanto $MD=y$, $KD=dz$, ſarà $\frac{ydz}{2}$ la formola generale degli ſpazj per le curve riferite al fuoco. E ſe in queſta formola ſi ſoſtituirà in luogo di y, o di dz il riſpettivo valore dato dall'equazione della curva, l'integrale ſarà lo ſpazio ricercato, cioè lo ſpazio AMD.

77.

77. Ma se la curva sarà riferita ad un diametro, cioè se le coordinate non saranno tra loro in angolo retto, condotta (*Fig.* 7.) HG perpendicolare ad AG, il prodotto di HG, o sia di FG in BC sarà il piccolo parallelogrammo $BCED$, ed in conseguenza l'elemento dell'area ABD. E perchè essendo dato l'angolo DBG, è data la ragione del seno tutto al seno retto, che sia per esempio quella di m ad n, fatta al solito $AB = x$, $BD = y$, sarà HG, o sia $FG = \frac{ny}{m}$, ed il parallelogrammo $BCED$ sarà $\frac{nydx}{m}$, formola generale dello spazio.

78. Egli è chiaro, che la somma di tutte le porzioni infinitesime DH della curva formano la curva stessa, e però, che DH ne sarà l'elemento, adunque chiamata (*Fig.* 6.) $AB = x$, $BD = y$, e però $BC = dx$, $EH = dy$, nelle curve riferite all'asse, cioè con le coordinate in angolo retto, sarà $DH = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, formola generale per la rettificazione di esse curve.

79. Rispetto alle curve riferite al fuoco, fatta pure $MD = y$, $KD = dz$, sarà isteſſamente la formola generale $\sqrt{dy^2 + dz^2}$.

80. Ma intorno alle curve con le coordinate in angolo obbliquo, (*Fig.* 7.) essendo dato l'angolo HCG, è data la ragione del seno tutto al seno del complemento

mento, che sia quella di m, ad e, onde sarà $CG = \frac{ey}{m}$, ed $EF = \frac{edy}{m}$, e però $DH = \sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$.

81. Sostituito in ciascuna di queste formole, in luogo di dy, o di dx, o di dz, il rispettivo valore dato per l'altra variabile, e suoi differenziali dalla equazione della curva, ed indi fatte le integrazioni, averemo la ricercata lunghezza della curva AD.

82. S'intenda moversi il piano AHC (*Fig.* 6.) attorno alla retta AC, la curva AH descriverà una superficie nel mentre, che il piano AHC descriverà un solido; ma la porzione infinitesima DH descriverà una zona infinitesima, che sarà l'elemento della superficie descritta dalla curva AH, ed il piano infinitesimo $DBCH$ descriverà un solido pure infinitesimo, che sarà l'elemento del solido descritto dal piano AHC. Ora intorno alle curve riferite all'asse colle coordinate in angolo retto; sia la ragione del raggio alla circonferenza del circolo quella di r alla c, la circonferenza descritta col raggio $BD = y$ sarà $\frac{cy}{r}$, e però $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2 + dy^2}$ l'espressione della zona infinitesima, ed in conseguenza la formola generale per le superficie.

83. Sarà pure $\frac{cyy}{2r}$ l'area del circolo col rag-

gio

gio $BD = y$, e però $\frac{cyydx}{2r}$ farà l'efpreffione del cilindretto infinitefimo defcritto dal rettangolo $BCED$, ma effo non differifce, fe non per quantità infinitefima del fecondo ordine, dal folido generato dal piano $BCHD$; adunque farà $\frac{cyydx}{2r}$ la formola generale per i folidi.

84. Ma rifpetto al cafo della *Fig.* 7., cioè quando le coordinate fono tra loro nel dato angolo obbliquo, il raggio del circolo, fopra cui infifte la piccola zona, ed il piccol cilindro, non è $CH = y$, ma bensì $GH = \frac{ny}{m}$, ficcome l'elemento DH, che forma la zona, non è $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ma $\sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$, e l'altezza del picciol cilindro non è $BC = dx$, ma $FD = dx + \frac{edy}{m}$; adunque la formola della fuperficie in quefto cafo farà $\frac{cny}{rm}\sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$.

85. Il prodotto del circolo col raggio GH nell' altezza FD, cioè $\frac{cnnyy}{2rmm} \times \overline{dx + \frac{edy}{m}}$, è l'elemento del folido generato dal piano AGH; adunque da quefto fottraendo l'elemento del folido generato dal triangolo HCG, cioè $\frac{cnnyy}{2rmm} \times \frac{edy}{m}$, il rimanente farà l'elemento

del

del solido generato dal piano ABD, e però sarà $\frac{cnnyydx}{2rmm}$ la formola generale per essi solidi.

86. Per le curve riferite al fuoco, come che è variabile l'angolo DMB (*Fig.* 6.), e per conseguenza non si può avere il valore della BD, o CH, raggio del circolo, che necessariamente entra nella formola delle quadrature della superficie, e cubature del solido, fa d'uopo dall'equazione riferita al fuoco cavare l'equazione della stessa curva riferita all'asse, ed indi procedere colla solita maniera già spiegata; avvertendo, che nelle cubature bisognerà dagl'integrali sottrarre il cono generato dal triangolo MHC, per avere il solido generato dal piano AMD.

87. La maniera di cavare dall'equazione differenziale di una curva al fuoco l'equazione della stessa curva all'asse è la seguente.

La curva ADH (*Fig.* 6.) si consideri nel tempo stesso relativamente al fuoco M, ed all'asse AMB, egli è certo, che il quadrato HD dell'elemento della curva è eguale tanto ai due quadrati DK, KH, quanto agl'altri due DE, EH, e che di più il quadrato di MD è eguale ai due quadrati MB, BD. Chiamando $MB = x$, $BD = y$, $MD = z$, e l'arco minimo $DK = du$, avremo $dz^2 + du^2 = dx^2 + dy^2$, ed $xx + yy = zz$.

Ora l'equazione della curva al fuoco venga espressa

general-

generalmente dalla formola $pdz = du$, in cui p è una data funzione di z, e sarà $dz^2 + p^2dz^2 = dx^2 + dy^2$, e collocando in vece di dy il suo valore nascente dall'equazione $xx + yy = zz$, vale a dire $\frac{zdz - xdx}{\sqrt{zz - xx}}$, troveremo $dz^2 + ppdz^2 = dx^2 + \overline{\frac{zdz - xdx}{zz - xx}}^2$, la quale si riduce alla seguente $ppdz^2 \times \overline{zz - xx} = zzdx^2 - 2xzdxdz + xxdz^2$, ed estratta la radice quadrata, $pdz = \frac{zdx - xdz}{\sqrt{zz - xx}}$.

E' d'uopo espurgare nuovamente la premessa equazione liberandola dalla mistura delle incognite, col porre $x = \frac{zq}{b}$, e però $dx = zdq + qdz$. Fatta svanire, col mezzo dell'equazione sussidiaria assunta, la x, e le sue funzioni, avremo $\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$.

Nell'equazione $\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$ se tale sarà il valore di p dato per z, che la quantità $\frac{pdz}{z}$ con le debite sostituzioni possa ridursi alla differenziale d'un'arco di circolo, e che fatte le necessarie sommatorie, i due archi circolari si rispondano, come numero a numero, allora la curva sarà algebraica, e troveremo la sua equazione

all'

all'asse con una formola alla Cartesiana. In ogn'altro caso la curva sarà trascendente.

ESEMPIO.

Sia l'equazione di una curva al fuoco $\frac{zdz}{\sqrt{cc - 2bz - zz}} = du$.

Avremo in tal caso $p = \frac{z}{\sqrt{cc - 2bz - zz}}$, e nell'equazione $\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$, sostituito il valore di p, sarà essa $\frac{dz}{\sqrt{cc - 2bz - zz}} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$. Pongo $b + z = t$, dunque $bb + 2bz + zz = tt$, e $bb - tt = - 2bz - zz$, onde fatta la sostituzione, sarà $\frac{dt}{\sqrt{cc + bb - tt}} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$.

Sia per un caso $cc + bb = bb$, in tale supposto sarà $t = q$, cioè $b + z = q = \frac{bx}{z}$, dunque $bz + zz = bx$, e ponendo in luogo di z il suo valore, sarà l'equazione della curva $b\sqrt{xx + yy} + xx + yy = bx$, il che ec.

88. Il Canone assegnato c'insegna la maniera ancora di passare dall'equazione differenziale di una curva all'asse a quella del fuoco nel modo, che segue.

ESEM-

ESEMPIO I.

Si cerchi l'equazione al fuoco in un circolo, preso il fuoco in un punto della sua circonferenza A.

Sia (*Fig.* 8.) $AH = b$, $AG = x$, $AC = z = \sqrt{bx}$. Richiamisi a memoria la formola $\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$, ove si è preso $q = \frac{bx}{z}$; poichè per l'equazione locale del circolo è $bx = zz$, sarà $q = z$, sicchè fatta svanire la q, sostituendo il suo valore z, sarà $\frac{pdz}{z} = \frac{dz}{\sqrt{bb - zz}}$, o sia $p = \frac{z}{\sqrt{bb - zz}}$; nella formola adunque $pdz = du$ se in cambio di p sostituirassi il valore ritrovato, sarà $\frac{zdz}{\sqrt{bb - zz}} = du$, equazione del circolo al fuoco preso nel punto A.

ESEMPIO II.

89. Si cerchi l'equazione delle sezioni coniche riferite al loro umbilico M. (*Fig.* 6.)

Chiamata $MB = x$, $BD = y$, l'equazione genera-

le, che abbraccia tutte le sezioni del cono, sarà $a \pm \frac{cx}{b} = \sqrt{xx + yy}$, cioè: alla parabola col parametro $2a$, quando $c = b$; all' ellissi coll' asse trasverso $= \frac{2abb}{bb - cc}$, col conjugato $= \frac{2ab}{\sqrt{bb - cc}}$, distanza del fuoco dal vertice $= \frac{ab}{b + c}$, se b sia maggiore di c; all' iperbola coll' asse trasverso $= \frac{2abb}{cc - bb}$, col conjugato $= \frac{2ab}{\sqrt{cc - bb}}$, distanza del vertice dall' umbilico $= \frac{ab}{b + c}$, se b sia minore di c; se $c = 0$, sarà al circolo col diametro $= 2a$. Ma $\sqrt{xx + yy} = z$, dunque $a \pm \frac{cx}{b} = z$, ed in oltre $bx = zq$, dunque $a \pm \frac{czq}{bb} = z$, ovvero $\pm \frac{bb}{c} \mp \frac{abb}{cz} = q$, e differenziando $\pm \frac{abcbdz}{cczz} = dq$, e $qq = \frac{bbbb}{cc} - \frac{2abbbb}{ccz} + \frac{aabbbb}{cczz}$, ed $bb - qq = bb - \frac{bbbb}{cc} + \frac{2abbbb}{ccz} - \frac{aabbbb}{cczz}$, avremo dunque

$$\frac{dq}{\sqrt{bb - qq}} = \frac{\pm\, cbabdz}{cz\sqrt{bbcczz - bbb^2z^2 + 2abbb^2z - a^2bbbb}} = \frac{pdz}{z},$$

dunque $p = \frac{\pm\, abb}{\sqrt{bbcczz - bbb^2z^2 + 2abbb^2z - aabbbb}}$, ed

essendo

essendo $pdz = du$, avremo l'equazione cercata

$$\frac{\pm abhdz}{\sqrt{bhcczz - bbhhzz + 2abbhhz - aabbhh}} = du.$$

Il segno negativo serve, quando le assisse si prendono dal fuoco verso il vertice, il positivo al contrario ec.

90. Dissi doversi ridurre l'equazione della curva al fuoco ad un altra riferita all'asse, non perchè ciò sia necessario assolutamente per le compianazioni delle superficie, e per le cubature de' solidi, mentre tutto questo si può ottenere per mezzo del noto Teorema, cioè, che *La periferìa della curva moltiplicata nel viaggio del centro di gravità d'essa periferìa è eguale alla superficie del solido, che dalla rotazione viene generato; e l'área della curva moltiplicata nel viaggio del centro di gravità d'essa area è eguale al solido accennato*; ma qui non si suppone il Lettore informato di essi centri di gravità.

Ora per avere una sufficiente idea delle curve riferite al fuoco, mi faccio ad indagare la loro costruzione. Sia una di queste *BCD*, (*Fig. 9.*) le coordinate infinitamente prossime *AC*, *AE*, che partono dal punto *A*, si chiamino z, la loro differenza $FE = dz$, e l'archetto minimo *CF* descritto col centro *A* sia $= du$. La natura della curva venga generalmente espressa dall'equazione differenziale $pdz = du$, in cui la p è data in qualsivoglia modo per z. Si noti pertanto, che il

primo membro pdz, avendo le variabili z, che tutte prendono origine dal polo A, è integrabile o algebraicamente, o trascendentemente; ma l'altro membro du, senza incorrere in paralogismo, non può sommarsi, non essendo egli già la flussione dell' arco u, perchè esso elemento du cresce, o cala in doppio senso, cioè ed in se stesso, e coll' aumentarsi o diminuirsi dell' ordinate AC, AE. Per procedere adunque aggiustatamente, col raggio arbitrario $AI = r$ si descriva il circolo IGH, e sia nella periferia determinato un punto qualunque I, da cui si prendano come da punto fisso gl'archi crescenti IG, IH; e prorogate, se occorre, le variabili AC, AE fino in G, ed H, saranno simili i settori ACF, AGH, e però $z, du :: r, GH$, che si chiami dq, dunque $\frac{zdq}{r} = du$; ma per l'equazione generale della curva è $pdz = du$, dunque $\frac{zdq}{r} = pdz$, e però $\frac{rpdz}{z} = dq$; quindi sommando, sarà $\int \frac{rpdz}{z} = q = IG$. Le costanti aggiunte, o levate nell' integrare altro non farebbero, che diversificare il sito del punto I.

ESEM-

ESEMPIO I.

Sia da coſtruirſi la ſpirale logaritmica, la di cui equazione è $\frac{adz}{b} = du$; ma $du = \frac{zdq}{r}$, dunque $\frac{adz}{b} = \frac{zdq}{r}$; o pure, perchè il raggio AI è aſſunto ad arbitrio, fatta $b = r$, e preſa a come unità, $\frac{dz}{z} = dq$, ed integrando, $lz = q$, la di cui effezione geometrica è traſcendente, ma ſempliciſſima.

ESEMPIO II.

Sia la ſpirale iperbolica della ſottangente coſtante $= a$, e però l'equazione $\frac{adz}{z} = du$; ma $du = \frac{zdq}{r}$, dunque $\frac{ardz}{zz} = dq$, e ſommando ſarà $b - \frac{ar}{z} = q$ ec.

In tali coſtruzioni ſi â ſempre l'arco IG di circolo, che forma l'omogeneo di comparazione, l'altro membro $\int \frac{rpdz}{z}$ può eſſere integrabile analiticamente, come nel ſecondo eſempio, o traſcendentemente per via della quadratura dell'iperbola, come nel primo, o per qualunque altra più compoſta. Quindi in un ſolo caſo le noſtre curve poſſono eſſer algebraiche, cioè quan-

do la quantità $\int \frac{rpdz}{z}$ possa ridursi alla rettificazione d'un arco di cerchio, che al corrispondente IG stia, come numero a numero. Se la proporzione fosse per avventura sorda, allora la curva $BCED$ sarà bensì meccanica, ma non già dipendente dal tetragonismo del cerchio, riducendosi ad un problema diverso consistente nel dividere gl'archi circolari in qualunque data ragione, il che può ottenersi per mezzo dell' Elice o sia Spirale d'Archimede, o della Quadratice di Dinostrato.

Le soprascritte cose ci somministrano un' altro modo di far passaggio dalle espressioni delle curve al fuoco a quelle, che si riferiscono all'asse, o al contrario. Giacchè $\frac{rpdz}{z} = dq = \frac{rrdt}{rr + tt}$, chiamata la tangente $IK = t$ (num. 26.), sarà essa tangente t data analiticamente, o trascendentemente per z, ma $AI = r$, $AK = \sqrt{rr + tt}$, $AM = x$, $MC = y$, dunque $\frac{rz}{x} = \sqrt{rr + tt}$, e dopo le debite riduzioni, $\frac{r\sqrt{zz - xx}}{x} = t = \frac{ry}{x}$, ma t è dato per z, e $z = \sqrt{xx + yy}$, dunque siamo arrivati alla curva locale all'asse, che tosto si riduce alle solite coordinate x, y. Tornando indietro per la stessa strada si passa dalle equazioni all'asse a quelle al fuoco.

Ripi-

Ripiglio l'esempio del num. 87., cioè la curva $\frac{zdz}{\sqrt{cc-2bz-zz}} = du$ riferita al fuoco, per riferirla all' asse. Poichè si è presa $pdz = du$ per equazione generale delle curve riferite al fuoco, sarà in questo caso particolare $p = \frac{z}{\sqrt{cc-2bz-zz}}$, onde surrogato questo valore in luogo di p nell'equazione $\frac{rpdz}{z} = dq = \frac{rrdt}{rr+tt}$, sarà $\frac{rdz}{\sqrt{cc-2bz-zz}} = \frac{rrdt}{rr+tt}$. Faccio $b+z=s$, $dz=ds$, $bb+2bz+zz=ss$, onde $-2bz-zz=bb-ss$, e sostituiti questi valori, sarà $\frac{rds}{\sqrt{cc+bb-ss}} = \frac{rrdt}{rr+tt}$, cioè fatta $cc+bb=hh$, $\frac{rds}{\sqrt{hh-ss}}$, o sia $\frac{rhds}{h\sqrt{hh-ss}} = \frac{rrdt}{rr+tt}$; ma l'integrale del primo membro è un' arco di cerchio, di cui sia h il raggio, ed s il seno del complemento, (num. 37.) moltiplicato nella frazione costante $\frac{r}{h}$, e l'integrale del secondo è un'arco di cerchio del raggio r, tangente t; dunque il primo arco sarà al secondo, come h ad r, cioè saranno tra loro, come i raggi, dunque sono simili, dunque nella stessa ragione de' raggi sono pure le tangenti; e perchè la tangente del

del primo arco è $\frac{b}{s}\sqrt{bb-ss}$, sarà $\frac{b}{s}\sqrt{bb-ss}, t :: b, r$, cioè $t = \frac{r}{s}\sqrt{bh-ss}$, quindi restituito il valore di s, e posto $\frac{ry}{x}$ in luogo di t, si averà

$\frac{ry}{x} = \frac{r\sqrt{bb-bb-2bz-zz}}{b+z}$, equazione ridotta all'asse, la quale si esprimerà con le sole coordinate x, y, ponendo in luogo di zz il valore $xx+yy$, e sarà $by+y\sqrt{xx+yy} = x\sqrt{bb-bb-2b\sqrt{xx+yy}-xx-yy}$, che è la stessa della ritrovata al citato num. 87.

Per passare dall'equazioni all'asse a quelle del fuoco, prendo l'Esempio I. del num. 88. la di cui equazione al circolo è $z = \sqrt{bx}$ (*Fig.* 8.).

La tangente data per z dell'arco OQ descritto col centro A, raggio r, si trova essere $\frac{r\sqrt{bb-zz}}{z} = t$; dunque nell'equazione canonica $dq = \frac{rrdt}{rr+tt}$ sostituiti in luogo di t, e di dt i rispettivi valori, averemo $-dq = -\frac{rdx}{\sqrt{bb-zz}}$; pongo $-dq$, perchè crescendo AC, (z) cala l'arco OQ (q); ma $dq = \frac{rdu}{z}$, quindi

di $\frac{rdu}{z} = \frac{rdz}{\sqrt{bb - zz}}$, cioè $\frac{zdz}{\sqrt{bb - zz}} = du$, che è la ſteſſa equazione della ritrovata al num. 88.

91. Nè meno ſono neceſſarie le particolari formole, che ſi ſono ritrovate nel caſo delle curve con le coordinate in angolo obbliquo tra loro, perchè tali equazioni poſſono ſempre mutarſi in altre, che abbiano le coordinate in angolo retto, ed indi poi ſi potrà ſervirſi delle ſolite formole.

Ed in fatti ſi chiami (*Fig.* 7.) $HG = p$, $AG = q$; è adunque $p = \frac{ny}{m}$, $q = x + \frac{ey}{m}$, denominando, come ſopra, $AB = x$, $BD = y$, e la ragione del ſeno tutto al ſeno retto quella di m ad n, al ſeno del complemento quella di m ad e; adunque ſarà $y = \frac{mp}{n}$, $x = q - \frac{ey}{m} = q - \frac{ep}{n}$. Soſtituiti per tanto nella propoſta equazione in luogo di x, ed y queſti valori dati per p, e q, avraſſi l'equazione della curva con le coordinate in angolo retto fra loro. Ma ſuccederà bene ſpeſſo, che l'equazione primitiva ſia ſemplice, e trasformandola ſi faccia aſſai compoſta; anzi, che eſſendo ſeparate le incognite nella propoſta, non lo ſieno nella trasformata, il che è di maggiore difficoltà, nè poſſano ſepararſi con le ſolite regole di diviſioni, eſtrazioni di radici ec.

Tuttavia però in molti casi particolari non sarà forse mal fatto il mettere a prova, e l'una, e l'altra maniera per appigliarsi a quella, che nel dato caso sarà più comoda.

Ma sarà opportuno venire agl' Esempj, ne' quali, quando non si avvisi in contrario, intenderassi sempre, che le coordinate siano fra loro in angolo retto.

Delle Quadrature de' Spazj.

ESEMPIO I.

92. Sia ABC (*Fig.*10.) una parabola apolloniana dell'equazione $ax=yy$, una qualunque assissa $AD=x$, $DB=y$, e debbasi quadrare lo spazio ADB. Sarà dunque $y=\sqrt{ax}$, e posto questo valore nella formola generale de' spazj (ydx) in luogo di y, sarà essa $dx\sqrt{ax}$, ed integrando $\frac{2}{3}x\sqrt{ax}+b$. La quantità b è la solita costante, che nelle integrazioni devesi aggiungere, e che ora fa d'uopo di determinare. Nel punto A, cioè quando $x=0$, lo spazio è zero, adunque l'integrale $\frac{2}{3}x\sqrt{ax}+b$, che esprime questo spazio, deve pure essere zero, fatta $x=0$, e però sarà $\frac{2}{3}0\sqrt{a0}+b=0$, cioè $b=0$; vale a dire, che in questo caso non devesi all'integrale aggiungere costante alcuna.

Adun-

Adunque sarà lo spazio $ABD = \frac{2}{3} x\sqrt{ax}$, ma $\sqrt{ax} = y$, onde $ABD = \frac{2}{3} xy$, cioè eguale a due terzi del rettangolo dell'affissa nell' ordinata.

Quindi se si volesse lo spazio chiuso da una fissa, e determinata affissa, ed ordinata, per esempio quando sia $x = 2a$; comecchè, per l'equazione della curva, è in questo caso $y = \sqrt{2aa}$, sarà lo spazio $= \frac{4}{3} aa\sqrt{2}$. Se le affisse della parabola non principiassero dal vertice A, ma da un dato punto D; posta, per esempio $AD = a$, una qualunque $DE = x$, il parametro $= f$, sarà l'equazione $af + fx = yy$, ed $y = \sqrt{af + fx}$. Sostituito questo valore nella formola ydx, sarà essa $dx\sqrt{af + fx}$, ed integrando $\frac{2}{3} \times \overline{a + x}\sqrt{af + fx} + b$ eguale allo spazio $DCEB$. Ma per determinare la costante b si rifletta, che nel punto D, cioè quando $x = 0$, lo spazio è eguale a zero, adunque nell' integrale fatta $x = 0$, dovrà essere $\frac{2}{3} a\sqrt{af} + b = 0$, e però la costante $b = -\frac{2a}{3}\sqrt{af}$; adunque per avere l'integrale compito, in luogo di aggiungere la b, bisognerà sottrarre $\frac{2}{3} a\sqrt{af}$, e però lo spazio ricercato $DCEB$ sarà $= \frac{2}{3} \times \overline{a + x}\sqrt{af + fx} - \frac{2}{3} a\sqrt{af}$.

Sia $AE = a$, ed in E principj la x verso A, e sia

una qualunque $ED = x$, sarà l'equazione $af - fx = yy$, ed $y = \sqrt{af - fx}$, onde $ydx = dx\sqrt{af - fx}$, ed integrando, sarà $-\frac{2}{3}\overline{a - x} \times \overline{af - fx}^{\frac{1}{2}} + b$. Ma quando $x = 0$, lo spazio pure è $= 0$, adunque fatta nell'integrale $x = 0$, dovrà essere $-\frac{2}{3} a\sqrt{af} + b = 0$, e però $b = \frac{2}{3} a\sqrt{af}$; adunque lo spazio $EDBC = \frac{2}{3} a\sqrt{af} - \frac{2}{3} \times \overline{a - x}\sqrt{af - fx}$.

Si è veduto, che generalmente lo spazio AEC nella parabola è $= \frac{2}{3}\ AE \times EC$, così lo spazio $ADB = \frac{2}{3}\ AD \times DB$; adunque lo spazio $DECB$ sarà $= \frac{2}{3}\ AE \times EC - \frac{2}{3}\ AD \times DB$, il che appunto confronta col calcolo dell'uno, e dell'altro caso dell'origine della x dal punto D verso E, e dal punto E verso D.

Prendo l'equazione generale a tutte le parabole di qualunque grado $a^m x^n = y^r$, onde sarà $y = a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}}$; e però la formola $ydx = a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}} dx$, ed integrando, sarà lo spazio $= \frac{ra^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n+r}{r}}}{n+r} + b$, ma presa $x = 0$, si trova essere $b = 0$, adunque non va aggiunta costante alcuna, e l'integrale ritrovato $\frac{ra^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n+r}{r}}}{n+r}$ è compito, e po-

ponendo y in luogo di $a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}}$, sarà $\frac{rxy}{n+r}$ = allo spazio ricercato.

ESEMPIO II.

93. Sia la curva $y = \sqrt[m]{x+a}$, sarà adunque $ydx = dx \sqrt[m]{x+a}$, ed integrando, sarà lo spazio $\frac{m}{m+1} \times \overline{x+a} \times \overline{x+a}^{\frac{1}{m}} + b$.

Ma posta $x = 0$, dovrà essere $b = -\frac{m}{m+1} \times a \sqrt[m]{a}$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio ricercato sarà $= \frac{m}{m+1} \times \overline{x+a} \sqrt[m]{x+a} - \frac{m}{m+1} \times a \sqrt[m]{a}$.

ESEMPIO III.

94. Sia l'iperbola fra gl'asintoti *FED*, (*Fig.* 11.) e sia $AB = x$, $BE = y$, e l'equazione $xy = aa$; sarà $y = \frac{aa}{x}$, e però $ydx = \frac{aadx}{x}$, ed integrando, sarà lo spazio $= a\,l\,x + b$, preso il logaritmo nella logaritmi-

ca

ca della ſottangente $= a$. Ma poſta $x = 0$, il logaritmo del zero è quantità infinita, e negativa, per la natura della logaritmica, adunque la quantità b da aggiungerſi all'integrale deve eſſere quantità infinita, e poſitiva, e però infinito lo ſpazio compreſo della curva EF prodotta in infinito, dall'aſintoto, e dalle due coordinate AB, BE.

Sia l'iperboloide dell'equazione $a^3 = xyy$, ſarà $y = \sqrt{\frac{a^3}{x}}$, e però $ydx = dx\sqrt{\frac{a^3}{x}}$, ed integrando, ſarà lo ſpazio $= 2\sqrt{a^3 x} + b$, ma poſta $x = 0$, è $b = 0$, adunque non fa d'uopo aggiungere coſtante alcuna, e l'integrale compito, cioè lo ſpazio $ABEF$ infinitamente prodotto all'insù, ſarà $2\sqrt{a^3 x}$, quantità finita, o ſia, per l'equazione della curva, $= 2xy$.

Sia l'iperboloide dell'equazione $a^3 = xxy$; ſarà $y = \frac{a^3}{xx}$, ed $ydx = \frac{a^3 dx}{xx}$, ed integrando ſarà lo ſpazio $= -\frac{a^3}{x} + b$, ma poſta $x = 0$, ſarà $\frac{a^3}{0}$ quantità infinita, adunque b è eguale all'infinito, onde per avere l'integrale compito biſognerà aggiungere quantità infinita, e però ſarà infinito lo ſpazio.

Sia generalmente l'equazione a tutte le iperboloi-

di

di $a^{m+n} = x^n y^m$, sarà $y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{-\frac{n}{m}}$, e però $\int y dx = \frac{ma^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{m-n}{m}}}{m-n} + b$. Se $m = 1$, $n = 1$, cioè $xy = aa$, avremo $\int y dx = \frac{aa}{o} + b$, quantità infinita, onde lo spazio infinito, come si è veduto di sopra.

Se $n = 1$, $m = 2$, cioè $a^3 = xyy$, sarà $\int y dx = 2\sqrt{a^3 x} + b$; ma posta $x = o$, sarà pure $b = o$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio cercato $= 2\sqrt{a^3 x} = 2xy$, per l'equazione della curva, e però finito, quantunque infinitamente prodotto all' insù dalla parte di F.

Se $n = 2$, $m = 1$, cioè $a^3 = xxy$, sarà $\int y dx = -\frac{a^3}{x} + b$; ma posta $x = o$, sarà $-\frac{a^3}{o}$ infinito, e però $b =$ all'infinito, adunque si deve aggiungere all' integrale quantità infinita, e però lo spazio sarà infinito.

Se $n = 1$, $m = 3$; cioè $a^4 = xy^3$, sarà $\int y dx = \frac{3}{2} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + b$; ma posta $x = o$, sarà $b = o$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio, sarà $= \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 xx} = -\frac{3}{2} xy$, quantità finita, quantunque infinitamente prodotta all'insù.

Se

Se $n = 3$, $m = 1$; cioè $a^4 = x^3 y$, sarà $\int ydx = -\frac{a^4}{2xx} + b$; ma posta $x = 0$, è $b = \infty$, adunque lo spazio infinito.

Se $n = 1$, $m = 4$; cioè $a^5 = xy^4$, sarà $\int ydx = \frac{4}{3}\sqrt[4]{a^5 x^3} + b$; ma posta $x = 0$, sarà $b = 0$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio, sarà $= \frac{4}{3}\sqrt[4]{a^5 x^3} = \frac{4}{3} xy$, quantità finita.

Se $n = 4$, $m = 1$; cioè $a^5 = x^4 y$, sarà $\int ydx = -\frac{a^5}{3x^3} + b$; ma posta $x = 0$, sarà b eguale all'infinito, adunque infinito lo spazio. Con la stessa maniera si potrà procedere quanto si vuole.

Prendansi ora le assisse dal punto B, e si cerchi lo spazio $BCDE$. Sia dunque $AB = b$, $BC = x$, $CD = y$, e sia la stessa iperbola apolloniana, la di cui equazione $by + xy = aa$; adunque sarà $y = \frac{aa}{b + x}$, e però $ydx = \frac{aadx}{b + x}$, ed integrando $\int ydx = a\, l\, \overline{b + x} + f$, preso il logaritmo nella logaritmica della sottangente $= a$.

Ma

Ma per determinare la coſtante f, poſta $x = o$, dovrà eſſere $f = -a\,lb$, adunque l'integrale compito, cioè lo ſpazio $BCDE$ ſarà $a\,l\overline{b+x} - a\,lb$.

Se ſi prenda $BC = x$ infinita, ſarà infinito $l\overline{b+x}$; adunque lo ſpazio $EBCD$ infinitamente prodotto dalla parte di C è infinito.

Si prenda x negativa $= BA = -b$, ſarà $a\,l\overline{b+x}$ eguale ad a moltiplicato nel logaritmo del zero; ma il logaritmo del zero è quantità infinita, e negativa, adunque in queſto caſo lo ſpazio è negativo, cioè dalla parte di M, ed è infinito, come ſi è veduto anche di ſopra, e però lo ſpazio tra l'iperbola apolloniana, e gli aſintoti è infinito dall' una, e dall' altra parte infinitamente prodotto.

Sia l'iperboloide cubico dell'equazione $byy + xyy = a^3$, ſarà $y = \sqrt{\frac{a^3}{b+x}}$, onde $ydx = dx\sqrt{\frac{a^3}{b+x}}$, ed integrando $\int ydx = 2\sqrt{a^3b + a^3x} + f$, ma poſta $x = o$, ſarà $f = -2\sqrt{a^3b}$, adunque l'integrale compito, o ſia lo ſpazio $EBCD$, ſarà $= 2\sqrt{a^3b + a^3x} - 2\sqrt{a^3b}$, quantità algebraica. Preſa x infinita, ſarà infinito lo ſpazio $EBCD$ infinitamente prodotto dalla parte di C.

Preſa x negativa $= BA = -b$, l'integrale ſarà $-2\sqrt{a^3b}$, adunque lo ſpazio ſarà negativo, cioè ſa-

rà *FEBAM*, e sarà finito, quantunque infinitamente prodotto dalla parte di M, come si è pure veduto di sopra.

Sia l'iperboloide dell'equazione $\overline{b+x}^2 \times y = a^3$, sarà $y = \frac{a^3}{\overline{b+x}^2}$, onde $ydx = \frac{a^3 dx}{\overline{b+x}^2}$. Ed integrando $\int ydx = -\frac{a^3}{b+x} + f$, ma posta $x = 0$, sarà $f = \frac{a^3}{b}$; adunque l'integrale compito, cioè lo spazio $EBCD$ sarà $= \frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{b+x}$. Presa x infinita, il termine $-\frac{a^3}{b+x}$ sarà zero, adunque lo spazio sarà finito, quantunque infinitamente prodotto dalla parte di C. Sia x negativa $= BA = -b$, l'integrale sarà $\frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{0}$, ma $-\frac{a^3}{0}$ è quantità infinita, e negativa, adunque lo spazio sarà dalla parte di M infinito ec.

Con questo metodo operando troverassi, che lo spazio tra l'iperbola apolloniana, e gli asintoti infinitamente prodotto sarà infinito dall'una, e dall'altra parte; tra l'iperboloide primo cubico, e gli asintoti sarà finito dalla parte di M, ed infinito dalla parte di C; tra l'iperboloide secondo cubico, e gli asintoti sarà infinito dalla parte di M, e finito dalla parte di C; tra l'iperboloide primo del quarto grado, e gli asintoti sarà finito dalla parte di M, ed infinito dalla parte di C; tra

l'iper-

l'iperboloide secondo, e gli asintoti sarà finito dalla parte di C, ed infinito dalla parte di M ec.

Per porre in opera le serie. Prendo l'espressione dello spazio $BCDE$ della suddetta iperbola apolloniana, cioè $\frac{aadx}{b+x}$.

Ridotta questa in serie, sarà essa $= \frac{aadx}{b} - \frac{aaxdx}{bb} + \frac{aaxxdx}{b^3} - \frac{aax^3dx}{b^4}$ ec., ed integrando $\frac{aax}{b} - \frac{aaxx}{2bb} + \frac{aax^3}{3b^3} - \frac{aax^4}{4b^4}$ ec., la qual serie infinitamente prodotta equivale appunto allo spazio $BCDE$, e se fosse sommabile, ci darebbe in termini finiti, cioè algebraicamente lo spazio cercato, vale a dire la quadratura dell'iperbola, ma non essendo sommabile, quanti più termini di essa si prenderanno, principiando dal primo, tanto più ci avvicineremo al giusto valore dello spazio.

Prendo l'assissa BT dalla parte de' negativi, sarà l'equazione della curva $by - xy = aa$, e però $ydx = \frac{aadx}{b-x}$, e riducendo in serie, sarà

$ydx = \frac{aadx}{b} + \frac{aaxdx}{bb} + \frac{aaxxdx}{b^3} + \frac{aax^3dx}{b^4} + \frac{aax^4dx}{b^5}$ ec., ed integrando, $\int ydx = \frac{aax}{b} + \frac{aaxx}{2bb} + \frac{aax^3}{3b^3} + \frac{aax^4}{4b^4} + \frac{aax^5}{5b^5}$ ec.

eguale allo ſpazio $BTPE$. Preſa $BT = BA$, lo ſpazio $FEBAM$ infinitamente prodotto dalla parte di M ſarà $= aa + \frac{aa}{2} + \frac{aa}{3} + \frac{aa}{4} + \frac{aa}{5}$ ec., ſerie di valore infinito; adunque lo ſpazio infinito.

ESEMPIO IV.

95. Fra gl'aſintoti AS, AB (*Fig.* 12.) ſia l'iperbola equilatera OC, e ſia $AB = BC = a$, $BI = -x$. S'intenda deſcritta la curva mecanica BEF tale, che il rettangolo di AB in qualunque ordinata IE ſia eguale al corriſpondente ſpazio iperbolico $BCOI$. Si ricerca lo ſpazio indeterminato $SABEF$. Sia l'ordinata $IE = z$. Si è veduto, eſſere lo ſpazio $BCOI$ eguale alla ſerie $ax + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3a} + \frac{x^4}{4aa} + \frac{x^5}{5a^3}$ ec., poſta come ſuppongo, $a = b$, adunque per la proprietà della curva, ſarà $z = x + \frac{xx}{2a} + \frac{x^3}{3aa} + \frac{x^4}{4a^3}$ ec., e però $zdx = xdx + \frac{xxdx}{2a} + \frac{x^3dx}{3aa} + \frac{x^4dx}{4a^3}$ ec.; ed integrando, ſarà finalmente lo ſpazio $BIE = \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{6a} + \frac{x^4}{12aa} + \frac{x^5}{20a^3} + \frac{x^6}{30a^4}$ ec., e preſa $x = a = BA$ riſpetto a tutto lo ſpazio $SABEF$ infi-

nitamente prodotto, farà esso $= \frac{aa}{2} + \frac{aa}{6} + \frac{aa}{12} + \frac{aa}{20} + \frac{aa}{30}$ ec., la qual serie è sommabile, ed è $= aa$, adunque è algebraicamente quadrabile, ed eguale al quadrato di BA lo spazio infinitamente prodotto $SABEF$.

ESEMPIO V.

96. Sia l'iperbola ATC, (*Fig.* 13.) l'asse trasverso $DA = 2a$, il parametro $= p$, $EB = x$, $BC = y$, e però l'equazione $xx - aa = \frac{2ayy}{p}$, e si cerchi lo spazio ABC; sarà dunque $y = \sqrt{\frac{pxx - paa}{2a}}$, e però la formola $ydx = dx \sqrt{\frac{pxx - paa}{2a}}$. Fatto sparire il segno radicale, e passando all' integrazione, troverassi con le solite maniere l'integrale in parte algebraico, ed in parte logaritmico, adunque lo spazio ABC dell' iperbola dipende dalla descrizione della logaritmica.

Se si voglia lo spazio $ACHE$, lo spazietto infinitesimo $ITCH$, fatta MT infinitamente prossima a BC, ne sarà l'elemento, e però la formola sarà xdy, in cui sostituendo in luogo di x il valore dato per y dall' equazione, sarà $xdy = dy \sqrt{\frac{2ayy + aap}{p}}$, il di cui inte-

grale

grale isteſſamente dipende dalla logaritmica .

E ſe tanto nella formola ydx del primo ſpazio, quanto nella xdy del ſecondo ſi aveſſe ſoſtituito in luogo di dx in quella, ed in luogo di dy in queſta i riſpettivi valori dati dall'equazione, ſi ſarebbero parimente ritrovati gl'integrali della ſteſſa natura.

Per far uſo delle ſerie. Prendo la formola dello ſpazio $ACHEA$, cioè xdy; adunque $xdy = dy\sqrt{\frac{2ayy + aap}{p}}$, e facendo per maggiore facilità $2a = p$, (giacchè le coſtanti non alterano il metodo) cioè ſuppoſta l'iperbola equilatera, ſarà $xdy = dy\sqrt{yy + aa}$, e riducendo in ſerie il radicale, ſarà
$xdy = ady + \frac{yydy}{2a} - \frac{y^4 dy}{8a^3} + \frac{y^6 dy}{16a^5} - \frac{5y^8 dy}{128a^7}$ ec., ed integrando $\int xdy$, cioè lo ſpazio $ACHEA = ay + \frac{y^3}{6a} - \frac{y^5}{40a^3} + \frac{y^7}{7 \times 16a^5} - \frac{5y^9}{9 \times 128a^7}$ ec., ſerie che non ſi ſa ſommare. E ſottraendo queſta ſerie dal rettangolo xy, avraſſi lo ſpazio ABC.

Si conducano dal centro E le infinitamente proſſime ET, EC, e ſia AKP tangente nel vertice. Col centro E ſi deſcrivano gli archetti di circolo KQ, TR;

ſarà

farà $AK = \frac{ay}{x}$, e $KP = \frac{axdy - aydx}{xx}$, $ET = \sqrt{xx + yy}$, $EK = \frac{a\sqrt{xx + yy}}{x}$, e per la similitudine de' triangoli PKQ, KEA, o sia TEM, farà $KQ = \frac{axdy - aydx}{x\sqrt{xx + yy}}$, e per la similitudine de' settori EKQ, ETR, farà $TR = \frac{xdy - ydx}{\sqrt{xx + yy}}$, e però farà $\frac{1}{2} ET \times TR$, cioè $\frac{xdy - ydx}{2}$ l'elemento del settore ETA, e sostituendo in luogo di y, e dy il valore dato dall'equazione della curva $y = \sqrt{xx - aa}$, (supposta equilatera l'iperbola) farà $\frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}$, ed integrando $\int \frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}$, cioè il settore $ETA =$ $- \frac{1}{2} a\, l\, \overline{x - \sqrt{xx - aa}}$ nella logaritmica della sottangente $= a$, il quale spazio è espresso da quantità negativa appunto, perchè si assume nel senso de' negativi.

Riducendo la formola in serie, troveremo $\frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}} =$ $\frac{aadx}{2x} + \frac{a^4 dx}{4x^3} + \frac{3a^6 dx}{16x^5} + \frac{5a^8 dx}{32x^7} + \frac{35a^{10} dx}{256x^9}$ ec.

Ma per integrare il primo termine della serie sarebbe

rebbe d'uopo ridurre prima quello ancora ad una ferie infinita; adunque farà meglio fare più speditamente nel feguente modo. Sia $EM = x$, $MT = y$, $AK = z$, farà $KP = dz$, e fia $KE = p$, $AE = a$, femiasse trasverso, il femiasse conjugato $= b$. Sarà adunque $KQ = \frac{adz}{p}$, $ET = \frac{px}{a}$, $TR = \frac{xdz}{p}$, e però $\frac{1}{2} ET \times TR = \frac{xxdz}{2a}$, ma, per l'equazione della curva, è $y = \frac{b}{a}\sqrt{xx - aa}$, e per i triangoli fimili EAK, EMT, farà $y = \frac{xz}{a}$, adunque $zx = b\sqrt{xx - aa}$, ed $xx = \frac{aabb}{bb - zz}$; e però la formola farà $\frac{abbdz}{2 \times \overline{bb - zz}}$, cioè ridotta in ferie, $\frac{adz}{2} + \frac{azzdz}{2bb} + \frac{az^4 dz}{2b^4} + \frac{az^6 dz}{2b^6} + \frac{az^8 dz}{2b^8}$ ec., ed integrando, $\int \frac{abbdz}{2 \times \overline{bb - zz}}$, cioè lo spazio $ETA = \frac{az}{2} + \frac{az^3}{6bb} + \frac{az^5}{10b^4} + \frac{az^7}{14b^6} + \frac{az^9}{18b^8}$ ec.

ESEM-

ESEMPIO VI.

97. Sia il circolo ABD (*Fig.* 14.) col diametro $AD = a$, e si cerchi l'area d'un qualunque mezzo segmento AHE. Fatta $AE = x$, $EH = y$, sarà l'equazione $y = \sqrt{ax - xx}$, e però $ydx = dx\sqrt{ax - xx}$. Qui non occorre liberare la formola dalla radicale, o tentare altri modi, a fine di mutarla in un'altra capace d'essere integrata algebraicamente, o per mezzo de' logaritmi, perchè sarà fatica superflua, mentre ci ridurremo sempre ad una formola di quadratura, o rettificazione di circolo, come si è notato al num. 37., e però senz'altro potrassi procedere con le serie.

Risoluta adunque in serie la formola, sarà

$$dx\sqrt{ax - xx} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{8a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}} dx}{16a^{\frac{5}{2}}} \text{ ec.},$$

ed integrando $\int ydx$, cioè lo spazio $AEH =$

$$\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{28a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{72a^{\frac{5}{2}}} \text{ ec.}$$

Sia ora il raggio $CA = a$, e sia $CE = x$, $EH = y$,

e l'equazione $y = \sqrt{aa - xx}$; adunque $ydx = dx\sqrt{aa - xx}$, e riducendo in serie, $ydx = adx - \frac{xxdx}{2a} - \frac{x^4 dx}{8a^3} - \frac{x^6 dx}{16a^5} - \frac{5x^8 dx}{128a^7}$ ec., ed integrando, $\int ydx$, cioè lo spazio $CEHB = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ ec., e fatta $x = a$ rispetto a tutto il quadrante, $aa - \frac{aa}{6} - \frac{aa}{40} - \frac{aa}{112} - \frac{5aa}{1152}$ ec., ed il quadruplo di questa serie sarà l'area di tutto il circolo.

Per mezzo d'un settore. Sia $CA = a$, $AQ = x$, e condotta CK infinitamente prossima alla CQ, sarà $QK = dx$, $CQ = \sqrt{aa + xx}$, e descritto col centro C l'archetto infinitesimo QS, per la similitudine de' triangoli KSQ, QAC, sarà $QS = \frac{adx}{\sqrt{aa + xx}}$, e però $MN = \frac{aadx}{aa + xx}$; adunque il picciolo settore CMN, elemento del settore CAM, sarà $= \frac{a^3 dx}{2 \times \overline{aa + xx}}$. Ridotto esso per tanto in serie, sarà $\frac{a^3 dx}{2 \times \overline{aa + xx}} = \frac{a^3 dx}{2aa} - \frac{a^3 xxdx}{2a^4} + \frac{a^3 x^4 dx}{2a^6} - \frac{a^3 x^6 dx}{2a^8} + \frac{a^3 x^8 dx}{2a^{10}}$ ec., ed integrando,

grando, farà $\int \frac{a^3 dx}{2 \times \overline{aa + xx}}$, cioè il fettore $CMA =$ $\frac{ax}{2} - \frac{x^3}{6a} + \frac{x^5}{10a^3} - \frac{x^7}{14a^5} + \frac{x^9}{18a^7}$ ec., e pofto, che l'arco AM fia la metà del quadrante, cioè prefa $x = a$, la ferie farà $\frac{aa}{2} - \frac{aa}{6} + \frac{aa}{10} - \frac{aa}{14}$ ec.; ed il doppio, cioè $aa - \frac{aa}{3} + \frac{aa}{5} - \frac{aa}{7}$ ec. farà il quadrante ABC.

Se in vece di prendere il raggio $CA = a$, l'aveffi prefo $= \sqrt{\frac{aa}{8}}$, farebbe il quadrante $ABC =$ $\frac{aa}{8} - \frac{aa}{3 \times 8} + \frac{aa}{5 \times 8} - \frac{aa}{7 \times 8}$ ec., e fottraendo attualmente ciafcun termine negativo dall'antecedente pofitivo, farà $\frac{aa}{3} + \frac{aa}{35} + \frac{aa}{99} + \frac{aa}{195}$ ec., che è la fteffa ferie inferita dal Sig. Leibnizio negl'atti di Lipfia dell'anno 1682.

ESEMPIO VII.

98. Sia l'elliffi BCD, (*Fig.* 15.) il femiaffe trafverfo $AB = a$, il femiaffe conjugato $AC = b$, $AE = x$, $EH = y$, onde l'equazione $\frac{bb}{aa} \times \overline{aa - xx} = yy$, e pe-

rò $ydx = \frac{bdx}{a} \sqrt{aa - xx}$, elemento dell'area $AEHC$.

Ma $dx \sqrt{aa - xx}$ è formola di quadratura del circolo BOD, il di cui diametro sia l'asse trasverso dell'ellissi, adunque dalla quadratura del circolo dipenderà la quadratura dell'ellissi. E perchè $\int \frac{bdx}{a} \sqrt{aa - xx} = EHCA$, e $\int dx \sqrt{aa - xx} = EMOA$; sarà un qualunque spazio dell'ellissi al corrispondente spazio del circolo sul diametro DB, come b ad a, cioè come il semiasse conjugato al semiasse trasverso, ed in conseguenza lo spazio intero dell'ellissi a tutto lo spazio del circolo nella stessa ragione. Ma poichè i circoli sono tra loro, come i quadrati de' diametri, o sia de' raggi, se faremo un circolo, il di cui raggio sia $= \sqrt{ab}$, cioè medio proporzionale tra i due semiassi dell' ellissi BCD, sarà questo circolo al circolo BOD, come ab, $aa :: b$, a, ma in questa medesima ragione è l'area dell'ellissi BCD allo stesso circolo BOD; adunque l'area dell'ellissi sarà eguale all'area del circolo, il di cui raggio sia medio proporzionale fra i semiassi dell'ellissi.

Per mezzo della serie. Ridotta in serie la formola $\frac{bdx}{a} \sqrt{aa - xx}$, sarà essa $= \frac{bdx}{a} \times \overline{a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}}$ ec.,

ed

ed integrando $\int \frac{bdx}{a} \sqrt{aa - xx}$, cioè l'area $ACHE =$

$bx - \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$ ec., e fatta $x = a$,

sarà l'area ACB, quarta parte dell'ellissi, eguale ad $ab - \frac{ab}{6} - \frac{ab}{40} - \frac{ab}{112} - \frac{5ab}{1152}$ ec.

Nella stessa ellissi, preso un qualunque arco DS; sia DP tangente in D, $AI = x$, $IS = y$, e per lo punto S condotta AP, le sia infinitamente prossima AK, che taglierà l'ellissi in T. Col centro A si descrivano gl'archetti di circolo KQ, TR; sarà dunque $AS = \sqrt{xx + yy} = AT$, $DP = \frac{ay}{x}$, $AK = AP = \frac{a\sqrt{xx + yy}}{x}$,

$KP = -\frac{axdy + aydx}{xx}$, essendo PK differenza negativa;

e per la similitudine de' triangoli PQK, PAD, sarà $KQ = -\frac{axdy + aydx}{x\sqrt{xx + yy}}$, e per la similitudine de' settori

ATR, AKQ, sarà $TS = -\frac{xdy + ydx}{\sqrt{xx + yy}}$, e però

$TR \times \frac{AT}{2}$, cioè $-\frac{xdy + ydx}{2}$ sarà la formola per lo

spazio ACT, la quale, sostituito in luogo di y, e di dy il valore dato dall'equazione della curva, sarà finalmente $\frac{abdx}{2\sqrt{aa - xx}}$.

Ma

Ma $\int \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$ è la rettificazione del circolo, come si è veduto al num. 37., e come si vedrà in breve, adunque la quadratura de' settori ellittici dipende dalla rettificazione, o quadratura del circolo. Nè occorre affaticarsi per liberare la formola dal radicale, perchè, ciò non ostante, urteremo in un'altra dallo stesso circolo dipendente.

Per mezzo poi delle serie troveremo, essere $\frac{abdx}{2\sqrt{aa - xx}} = \frac{bdx}{2} + \frac{bxxdx}{4aa} + \frac{3bx^4dx}{16a^4} + \frac{5bx^6dx}{32a^6} + \frac{35bx^8dx}{256a^8}$ ec., ed integrando, avremo lo spazio $ATC = \frac{bx}{2} + \frac{bx^3}{12aa} + \frac{3bx^5}{80a^4} + \frac{5bx^7}{224a^6} + \frac{35bx^9}{2304a^8}$ ec., e fatta $x = a$ rispetto a tutto lo spazio ADC, quarta parte dello spazio intero dell'ellissi, sarà esso $= \frac{ab}{2} + \frac{ab}{12} + \frac{3ab}{80} + \frac{5ab}{224} + \frac{35ab}{2304}$ ec.

Che se avessi voluto liberare la formola dal segno radicale, facendo la sostituzione $\sqrt{aa - xx} = a - \frac{xz}{a}$, si sarebbe mutata in quest' altra $\frac{aabdz}{aa + zz}$, la quale ridotta in

serie

ſerie ſi trova eſſere $bdz - \frac{bzzdz}{aa} + \frac{bz^4dz}{a^4} - \frac{bz^6dz}{a^6} + \frac{bz^8dz}{a^8}$ ec., ed integrando, $bz - \frac{bz^3}{3aa} + \frac{bz^5}{5a^4} - \frac{bz^7}{7a^6} + \frac{bz^9}{9a^8}$ ec., e poſta $x = a$, nel qual caſo è pure $z = a$, ſarà $ab - \frac{ab}{3} + \frac{ab}{5} - \frac{ab}{7} + \frac{ab}{9}$ ec. riſpetto al quadrante dell'elliſſi.

E ſe ſi ſupponga $a = b$, l'elliſſi paſſa ad eſſere un circolo del raggio $= a$, e la ſerie ſarà $aa - \frac{aa}{3} + \frac{aa}{5} - \frac{aa}{7} + \frac{aa}{9}$ ec. come al num. 97., che eſprimerà il quadrante; e però da qui ancora ſi vede, che l'area dell'elliſſi è all'area del circolo, il di cui diametro ſia eguale all'aſſe traſverſo dell'elliſſi, come l'aſſe conjugato all'aſſe traſverſo della ſteſſa elliſſi.

ESEMPIO VIII.

99. Sia la cicloide NAM, (*Fig.* 16.) il circolo generatore ARH, e ſia $AH = a$, $AB = x$, $BC = dx$, $BE = y$, $DF = dy$, ſarà l'equazione $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}} = \frac{dx\sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}$. Ma lo ſpazietto $QEFP$ è l'elemento dello

ſpazio

ſpazio AEQ, adunque $FP \times PQ$, cioè $\frac{xdx \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} =$ $dx \sqrt{ax-xx}$ ne ſarà la formola; ma $\int dx \sqrt{ax-xx}$ è il ſegmento circolare ASB, adunque lo ſpazio cicloidale AEQ ſarà eguale al corriſpondente ſpazio circolare ASB, e tutto lo ſpazio AMK al ſemicircolo. Ma il rettangolo $AHMK$ è quadruplo del ſemicircolo, poichè è il prodotto della ſemiperiferia nel diametro; adunque lo ſpazio AMH ſarà triplo del ſemicircolo, e però tutto lo ſpazio della cicloide triplo del circolo generatore.

Se ſi voleſſe immediatamente lo ſpazio AFC; come che il piccolo ſpazio $FCBE$, cioè ydx ne è l'elemento, e dall' equazione della curva abbiamo $dy = \frac{dx \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$, ſi riduca in ſerie l'omogeneo di comparazione; moltiplicando prima per $\sqrt{x}$ il numeratore, e denominatore, onde ſia $\frac{dx \sqrt{ax-xx}}{x} = \frac{a^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{8a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{16a^{\frac{5}{2}}}$ ec., e però integrando,

do, $\int \frac{dx \sqrt{ax - xx}}{x}$, cioè $y = 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{20a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{56a^{\frac{5}{2}}}$ ec., onde $ydx = 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{3a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{20a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}} dx}{56a^{\frac{5}{2}}}$ ec., e finalmente integrando,

$$\int ydx = ABE = \frac{4a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{15a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{70a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{252a^{\frac{5}{2}}} \text{ ec.}$$

ESEMPIO IX.

100. Sia la concoide ADR, $CB = BA = a$, $CM = x$, $MD = y$, (*Fig.* 17.) e si voglia lo spazio $ADGB$. Chiamo $CG = z$, la quale sarà sempre data per le x, ed y della proposta curva, come è assai chiaro. Sia CE infinitamente prossima a CD, e col centro C, cogl'intervalli CG, CD si descrivano i due archetti GI, DF, sarà $HI = dz$, ed il trapezio $FDGI$ l'elemento del ricercato spazio. Per la similitudine de'

triangoli HIG, BGC, farà $GI = \frac{adz}{\sqrt{zz - aa}}$, e per la similitudine de' settori CGI, CDF, farà $DF = \frac{azdz + aadz}{z\sqrt{zz - aa}}$. Ma il trapezio $FDGI$ è $= \overline{DF + GI} \times \frac{1}{2} GD = \frac{2aazdz + a^3 dz}{2z\sqrt{zz - aa}}$, dunque $\int \frac{2aazdz + a^3 dz}{2z\sqrt{zz - aa}}$, cioè $- a\, l\sqrt{zz - aa} - z + a \times$ arco di circolo col raggio $= a$, tangente $= \sqrt{zz - aa} - z$, (preso il logaritmo nella logaritmica della sottangente $= a$) farà eguale allo spazio, che si cercava.

Si può niente meno avere lo spazio totale, ed i parziali della stessa concoide considerando la curva in relazione al suo asse. Sia nella stessa Figura $AB = DG = a = BC$, $BM = x$, $MD = y$, e dal punto G si tiri all'ordinata MD la perpendicolare GO, farà $DO = \sqrt{aa - xx}$, per l'angolo retto GOD, e per la similitudine de' triangoli CBG, GOD farà $BG = \frac{a\sqrt{aa - xx}}{x} = MO$; dunqne $MD = \sqrt{aa - xx} + \frac{a\sqrt{aa - xx}}{x} = y$, quindi ydx, cioè l'elemento dello spazio, farà $dx\sqrt{aa - xx} + \frac{adx\sqrt{aa - xx}}{x}$. Il primo termine integrato

grato dipende della quadratura del circolo, il secondo da quella dell'iperbola.

ESEMPIO X.

101. Sia AMI (*Fig.* 18.) la Cissoide di Diocle, la di cui equazione $yy = \frac{x^3}{a-x}$. Sarà dunque la formola, sostituito il valore di y dato dall'equazione, $\frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{\overline{a-x}^{\frac{1}{2}}}$, il di cui integrale dipende dalla quadratura del circolo. Per avere il rapporto dello spazio totale della cissoide a quello del circolo generatore, si rifletta, che essendo l'equazione $yy = \frac{x^3}{a-x}$, sarà anco $yy \times \overline{ax-xx} = x^4$, e però $y\sqrt{ax-xx} = xx$. Ciò posto, differenziando la proposta equazione $ayy - xyy = x^3$, viene $2aydy - 2xydy - yydx = 3xxdx$, cioè $2dy \times \overline{a-x} - ydx = \frac{3xxdx}{y}$, e perchè $xx = y\sqrt{ax-xx}$, dunque $2dy \times \overline{a-x} - ydx = 3dx\sqrt{ax-xx}$. Ma $dy \times \overline{a-x}$ è l'elemento dello spazio $AMQB$, ydx è l'elemento dello spazio

AMP, ed integrando rispetto allo spazio totale, è $\int dy \times \overline{a-x} = \int ydx$, dunque in tale circostanza sarà $2\int dy \times \overline{a-x} - \int ydx = \int dy \times \overline{a-x}$, e però $\int dy \times \overline{a-x} = 3\int dx \sqrt{ax-xx}$, e perchè nel caso dello spazio totale della Cissoide $\int dx \sqrt{ax-xx}$ è l'area del semicircolo *ABN*; quindi lo spazio della Cissoide infinitamente prodotto è triplo del semicircolo generatore.

ESEMPIO XI.

102. Sia la Logaritmica *HBD* (*Fig.* 19.) all' asintoto *MQ*, e sia $AB =$ alla sottangente $= a$, $KH = y$, $AK = x$, e l'equazione $\frac{ady}{y} = dx$. Sarà adunque la formola $ydx = ady$, ed integrando $\int ydx = ay + bb$; ma posta $y = a$, sarà $bb = -aa$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio $AKHB = ay - aa$. Presa una qualunque altra ordinata $MN = z$, sarà pure $AMNB = az - aa$; adunque $MKHN = ay - az$. Sia l'ordinata *EF* minore di *AB*, ed eguale ad y, $AE = -x$, sarà

nello

nello ſteſſo modo l'equazione $\frac{ady}{y} = dx$, perchè eſſendo negativa la x, deve eſſere pure negativa la ſua differenza, ma creſcendo l'aſſiſſa x, cala l'ordinata y, adunque dovrà eſſere negativa la dy; per lo che ſarà pure negativo l'elemento dello ſpazio, ſarà adunque eſſo elemento $-ydx$, cioè $-ady$, ed integrando, $-ay + bb$, ma quando y ſia $= a$, ſarà $bb = aa$, adunque l'integrale compito, cioè lo ſpazio $AEFB$ ſarà $= aa - ay$; e poſta $y = 0$, cioè quando egli ſia infinitamente prodotto dalla parte di Q, ſarà egli $= aa$; ed in conſeguenza lo ſteſſo ſpazio infinitamente prodotto dalla parte di Q, ma che principj da una qualunque ordinata $EF = y$, ſarà $= ay$.

ESEMPIO XII.

103. La curva ABF ſia la Trattoria, (*Fig.* 20.) la di cui proprietà primaria è, che la tangente BP di un qualunque punto B, ſia ſempre coſtante eguale ad una data retta. Si faccia una qualunque aſſiſſa $ED = x$, l'ordinata $DB = y$, l'arco della curva $AB = u$, e la data retta $= a$. Perchè creſcendo l'aſſiſſa ED, cala l'ordinata DB, ſarà negativo il di lei elemento, cioè $-dy$; quindi per la proprietà della curva avremo l'e-

quazione

quazione $-\frac{ydu}{dy} = a$, e posto in luogo di du il valore $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, sarà $dx = -\frac{dy\sqrt{aa-yy}}{y}$. Ciò fatto, nella formola ydx degli spazj posto in luogo di dx il valore dato dall'equazione della curva, avremo $-dy\sqrt{aa-yy}$, elemento di un qualunque spazio $ABDE$. Ma posta AE la prima delle ordinate $= a$, e col raggio EA descritto il quadrante AQM, e condotta BQ parallela ad MH, poichè $DB = EC = y$, e per la proprietà del circolo, $CQ = \sqrt{aa-yy}$, anco l'elemento dello spazio circolare CQA sarà $-dy\sqrt{aa-yy}$; quindi lo spazio CQA eguale allo spazio $ABDE$, e così degl'altri, e per conseguenza lo spazio infinitamente prodotto compreso dalla trattoria ABF, dall'asintoto EH, e dalla retta AE sarà eguale al quadrante AME.

ESEMPIO XIII.

104. Sia la spirale ACB, (*Fig.* 21.) ed $AB = a$ il raggio del circolo BMD, la di cui periferia $= b$, un qualunque arco $BD = x$, $AC = y$; sarà l'equazione $by = ax$. Condotta AE infinitamente prossima ad AD, sia $ED = dx$, e col centro A si descriva l'archetto infinitesimo CH; per la similitudine de' settori ACH,

ADE

ADE, farà $CH = \frac{ydx}{a}$, e però il settore *ACH*, elemento dello spazio *ANCA*, farà $= \frac{yydx}{2a}$; ma, per l'equazione della curva, è $y = \frac{ax}{b}$, dunque esso elemento farà $= \frac{axxdx}{2bb}$, ed integrando, $\frac{ax^3}{6bb}$ (ommessa la costante, che è superflua) farà lo spazio *ACN*, e fatta $x = b$ rispetto a tutto lo spazio *ANB*, farà esso $= \frac{ab}{6}$.

Sia l'equazione generale alle infinite spirali $a^m x^n = b^n y^m$, adunque farà $yy = \frac{aax^{\frac{2n}{m}}}{b^{\frac{2n}{m}}}$, e la formola dello spazio farà $\frac{ax^{\frac{2n}{m}} dx}{2b^{\frac{2n}{m}}}$, ed integrando, $\frac{max^{\frac{2n+m}{m}}}{\overline{4n+2m} \times b^{\frac{2n}{m}}}$, e fatta $x = b$, farà lo spazio intero $= \frac{mab}{4n+2m}$.

E' facile a vedere, che lo spazio *ABMDCNA* terminato dal raggio *AB*, dall'arco di circolo *BMD*, e dalla porzione *ANC* della spirale farà $\frac{ax}{2} - \frac{ax^3}{6bb}$, perchè egli è eguale al settore *ABMDA* meno lo spazio *ACN*; ma se lo volessimo per mezzo di formola diffe-

differenziale, basta osservare, che l'elemento di esso sarà il trapezio infinitesimo $ECHD$, il quale si fa essere $= \overline{DE + CH} \times \frac{CD}{2}$, cioè $\overline{dx + \frac{ydx}{a}} \times \frac{\overline{a - y}}{2} = \frac{aadx - yydx}{2a}$, e ponendo in luogo di yy il valore $\frac{aaxx}{bb}$ dato dall'equazione, sarà $\frac{adx}{2} - \frac{axxdx}{2bb}$, ed integrando (ommessa la costante superflua) $\frac{ax}{2} - \frac{ax^3}{6bb}$.

ESEMPIO XIV.

105. Sia la parabola ABM (*Fig.* 22.) dell'equazione $ax = yy$, e sia $AC = x$, $CB = y$, e la ragione del seno tutto al seno retto dell'angolo BCD sia quella di a alla b; al seno del complemento, quella di a alla f, sarà $BD = \frac{by}{a}$, $CD = \frac{fy}{a}$. Sia $CH = dx$, adunque $CH \times DB = CHMB$, elemento dello spazio ACB, e però la formola sarà $\frac{bydx}{a}$, e posto in luogo di y il valore dato dall'equazione, cioè $\sqrt{ax}$, sarà $\frac{bdx\sqrt{ax}}{a}$, ed integrando, $\frac{2bx\sqrt{ax}}{3a}$, o sia $\frac{2bxy}{3a} = \frac{2}{3} AC \times BD$, ommessa la costante superflua.

ESEM-

ESEMPIO XV.

106. Sia la parabola *ACM* (*Fig.* 23.) riferita al fuoco *B*, la di cui equazione sarà $\frac{adz}{\sqrt{2az - aa}} = du$, essendo $BC = z$, $CD = du$, archetto infinitesimo di circolo, parametro $= 2a$. Sarà dunque il settore infinitesimo *BMC*, o sia *BDC* l'elemento dello spazio *ABC*, e però $\frac{zdu}{2}$, cioè $\frac{azdz}{2\sqrt{2az - aa}}$ la formola, il di cui integrale si trova essere $\frac{\overline{z + a}}{6}\sqrt{2az - aa} + mm$. Ma presa $z = BA = \frac{1}{2}a$, nel qual caso deve essere nullo lo spazio, sarà $mm = 0$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio *ABC*, sarà $= \frac{\overline{z + a}}{6}\sqrt{2az - aa}$.

Ed in fatti dal punto *C* abbassata la perpendicolare *CQ* ad *AQ*, lo spazio *BCA* è eguale allo spazio *QCA* meno il triangolo *BQC*, ma fatta $BQ = x$, $QC = y$, sarà $QCA - QCB = \frac{2}{3} \times \overline{\frac{1}{2}a + x} \times y - \frac{xy}{2} = \frac{\overline{2a + x}}{6} \times y$; adunque $BCA = \frac{\overline{2a + x}}{6} \times y$, ma per la proprietà della

parabola, $BC = AQ + AB = x + a$, cioè $z = x + a$, ed $y = \sqrt{aa + 2ax} = \sqrt{2az - aa}$; ſoſtituiti adunque in luogo di x, ed y queſti valori, troveremo $BCA = \frac{2a + x}{6} \times y = \frac{a + z}{6} \sqrt{2az - aa}$, come ſopra.

ESEMPIO XVI.

107. Se la quarta parte AC (*Fig.* 24.) della periferìa di circolo s'intenderà diſteſa nella retta (ac), e preſa una qualunque porzione (ae) eguale all' arco AE, ſi alzi normale (ed) eguale al ſeno retto DE, la curva (at), che paſſerà per tutti i punti (d) così determinati, ſi chiama la linea de' ſeni retti. Prodotta (ac) onde ſia eguale alla ſemicirconferenza del circolo, la curva averà un'altro ramo al di là di (ct) ſimile, ed eguale al primo.

Sia il raggio $= r$, un qualunque arco $AE = x = (ae)$, il corriſpondente ſeno $DE = y = (ed)$; poichè il differenziale, o ſia la fluſſione dell' arco eſpreſſa per mezzo del ſeno ſi trova eſſere $\frac{rdy}{\sqrt{rr - yy}}$, avremo $dx = \frac{rdy}{\sqrt{rr - yy}}$, equazione della noſtra curva. La formola adunque ydx, ſoſtituito il valore di dx, ſarà $\frac{rydy}{\sqrt{rr - yy}}$, ed integran-

do,

do, $-r\sqrt{rr-yy}+n$; ma posta $y=0$, viene $n=rr$, dunque l'integrale compito è $rr-r\sqrt{rr-yy}=$ allo spazio (ade), e fatta $y=r$, sarà $rr=$ allo spazio totale (atc). Quindi fatto il quadrato TH del raggio, e prodotto il seno DE in M, lo spazio (ade) sarà eguale al rettangolo DH, e lo spazio totale (atc) eguale al quadrato TH.

108. Gli addotti esempj possono bastare per fare uso del metodo, rimane solamente d'avvertirsi, che molte volte le equazioni delle curve, gli spazj delle quali si vogliono quadrare (e ciò s'intenda pure rispetto alle rettificazioni, quadrature di superficie, e cubature) possono essere tali, che non abbiano le incognite separate, nè si possano separare colla sola divisione, ed in conseguenza non siano addattabili alle formole. Tale sarebbe la curva $x^3+y^3=axy$.

In questi casi bisogna valersi di qualche congrua sostituzione, per mezzo di cui l'equazione si trasformi in un'altra, in cui sieno separate, o separabili le incognite. Ma non si può generalmente definire, quale sostituzione debba farsi; bisognerà avere pratica, e provarne molte per ottenere, quando si possa, l'intento.

Rispetto alla proposta $x^3+y^3=axy$. Si ponga $y=\frac{axx}{zz}$, e fatta la sostituzione, sarà l'equazio-

ne $x^3 + \frac{a^3 x^6}{z^6} = \frac{aax^3}{zz}$, cioè $x^3 = \frac{aaz^4 - z^6}{a^3}$. Differenziando adunque, $xxdx = \frac{4aaz^3dz - 6z^5dz}{3a^3}$; quindi presa la formola degli spazj, cioè ydx, poichè per la sostituzione è $y = \frac{axx}{zz}$, sarà essa formola $\frac{axxdx}{zz}$, e sostituendo in luogo di $xxdx$ il valore ritrovato $\frac{4aaz^3dz - 6z^5dz}{3a^3}$, sarà $ydx = \frac{4aazdz - 6z^3dz}{3a^2}$, ed integrando $\int ydx = \frac{2}{3}zz - \frac{z^4}{2aa}$; e restituendo in luogo di zz il valore $\frac{axx}{y}$, sarà finalmente $\int ydx = \frac{2axx}{3y} - \frac{x^4}{2yy}$.

ESEMPIO XVII.

109. Sia la curva $a^5xxyy - x^9 = a^6y^3$, di cui si voglia lo spazio. Pongo $y = \frac{xx}{z}$, e l'equazione si trasformerà in quest'altra $a^5z - x^3z^3 = a^6$, da cui si ricava $x = \frac{a\sqrt[3]{aaz - a^3}}{z}$, e però $dx = \frac{a^3dz}{3z \times \overline{aaz - a^3}^{\frac{2}{3}}} -$

adz

$\frac{adz \times \overline{aaz - a^3}^{\frac{1}{3}}}{zz}$, ed $y = \frac{aa \times \overline{aaz - a^3}^{\frac{2}{3}}}{z^3}$; quindi avremo l'elemento dello ſpazio, cioè $ydx = \frac{a^5 dz}{3z^4} - \frac{a^3 dz \times \overline{aaz - a^3}}{z^5} = \frac{a^6 dz}{z^5} - \frac{2a^5 dz}{3z^4}$, e però integrando $\int ydx = \frac{-a^6}{4z^4} + \frac{2a^5}{9z^3}$, e reſtituendo in luogo di z il ſuo valore $\frac{xx}{y}$, ſarà $\frac{-a^6 y^4}{4x^8} + \frac{2a^5 y^3}{9x^6}$ lo ſpazio ricercato. A queſto propoſito ſi potrà vedere il metodo del Signor Craigio nel ſuo libro: *De Calculo fluentium*.

Della rettificazione delle Curve.

ESEMPIO XVIII.

110. Sia da rettificarſi la parabola apolloniana, cioè da ritrovarſi una retta linea eguale ad un' arco qualunque della ſteſſa parabola, la di cui equazione ſia $ax = yy$. Differenziando ſarà $adx = 2ydy$, e $dx^2 = \frac{4yydy^2}{aa}$. Ma la formola per la rettificazione è $\sqrt{dx^2 + dy^2}$;

adun-

adunque sostituendo in questa, in luogo di dx^2, il valore dato dall' equazione differenziata, sarà $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{\sqrt{4yydy^2 + aady^2}}{a} = \frac{dy}{a}\sqrt{4yy + aa}$, elemento per la parabola apolloniana $ax = yy$. Passando alle integrazioni, fatta la sostituzione di $\sqrt{4yy + aa} = 2y + z$, a fine di levare il radicale, troveremo essere $\frac{dy}{a}\sqrt{4yy + aa} = -\frac{a^3dz}{8z^3} - \frac{adz}{4z} - \frac{zdz}{8a}$, il di cui integrale si vede essere in parte algebraico, ed in parte logaritmico, e però la rettificazione della parabola dipende dalla quadratura dell'iperbola, la qual verità in quest'altro modo pure si scorge. Sia l'iperbola equilatera ADE (*Fig.* 25.) coi semiassi $= a$, $BC = x$ dal centro, $CD = 2y$, la di cui equazione sarà $xx - aa = 4yy$. Condotta GE infinitamente prossima ad HD, sarà $HGED$ l'elemento dello spazio $ADHB$, ma $HGED$ si fa essere $2dy\sqrt{4yy + aa}$, che è la stessa formola della rettificazione della parabola, a riserva del denominatore costante $\frac{a}{2}$, dunque ec.

Per mezzo della serie. Prendo la sopra scritta formola per la rettificazione della parabola, cioè $\frac{dy}{a}\sqrt{4yy + aa}$,

la

la quale ridotta in ſerie ſarà $= dy + \frac{2yydy}{aa} - \frac{2y^4 dy}{a^4} + \frac{4y^6 dy}{a^6} - \frac{10y^8 dy}{a^8}$ ec., ed integrando, $\int \frac{dy}{a} \sqrt{4yy + aa}$, cioè l'arco qualunque $= y + \frac{2y^3}{3aa} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$ ec.

Se nella formola generale $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ in vece di ſoſtituire in luogo di dx il valore dato per y dall'equazione della curva, ſoſtituiremo in luogo di dy il valore dato per x, ſarà eſſa $\frac{dx \sqrt{4ax + aa}}{\sqrt{4ax}}$, o ſia $\frac{dx \sqrt{4xx + ax}}{2x}$, la quale non è punto più trattabile dell'altra.

Se la parabola non foſſe l'apolloniana, ma la ſeconda cubica, la di cui equazione è $axx = y^3$, differenziando ſarebbe $dx^2 = \frac{9ydy^2}{4a}$, e però la formola $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy \sqrt{\frac{9y + 4a}{4a}}$, il di cui integrale ſarà $\frac{9ay + 4aa \sqrt{9ay + 4aa}}{27aa} + m$; ma poſta $y = 0$, ſarà $m = -\frac{8a}{27}$; adunque l'integrale compito, cioè la lunghezza dell'arco ſarà $\frac{9ay + 4aa \sqrt{9ay + 4aa}}{27aa} - \frac{8a}{27}$.

Se nella parabola apolloniana ADM (*Fig.* 26.) ſarà

farà $AC = \frac{4a}{9}$, e si prenda una qualunque $CK = y$, il parametro $= \frac{9a}{4}$, farà $AK = \frac{4a}{9} + y$, $KM = \sqrt{\frac{4aa + 9ay}{4}}$, onde l'elemento dell'area $MKCD$ farà $dy\sqrt{\frac{4aa + 9ay}{4}}$, che è lo stesso dell'elemento della lunghezza della seconda parabola cubica, a riserva della costante a, e però la rettificazione di questa, e la quadratura di quella è la stessa cosa, onde perchè quella è algebraicamente quadrabile, questa è algebraicamente rettificabile. Quindi generalmente, se l'espressione dell'elemento di una qualunque data curva diviso per la differenza dell' incognita si porrà per ordinata, e la incognita per l'assissa, onde nasca una nuova curva, la quadratura di questa ci darà la rettificazione della curva data.

ESEMPIO XIX.

111. Sia il circolo AEM, (*Fig.* 27.) AM diametro $= a$, $AB = x$, farà $BF = y = \sqrt{ax - xx}$; adunque $dy = \frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}}$, $dy^2 = \frac{\frac{1}{4}aadx^2 - axdx^2 + xxdx^2}{ax - xx}$,

c

e però FH elemento della curva $= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}}$, e riducendo in ferie, farà

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx}{2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2 \times 2a^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2 \times 2 \times 4a^{\frac{3}{2}}} + \frac{15x^{\frac{5}{2}}dx}{2 \times 2 \times 4 \times 6a^{\frac{5}{2}}} + \frac{105x^{\frac{7}{2}}dx}{2 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8a^{\frac{7}{2}}}$$

ec., ed integrando, farà $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} +$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2 \times 3a^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{2 \times 4 \times 5a^{\frac{3}{2}}} + \frac{15x^{\frac{7}{2}}}{2 \times 4 \times 6 \times 7a^{\frac{5}{2}}} + \frac{105x^{\frac{9}{2}}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9a^{\frac{7}{2}}}$$

ec.; o pure effendo $dx^2 = \frac{dy^2 \times \overline{ax - xx}}{\frac{1}{4}aa - ax + xx}$, cioè (foftituendo yy in luogo di $ax - xx$) $dx^2 = \frac{yydy^2}{\frac{1}{4}aa - yy}$; pofto quefto valore in luogo di dx^2 nella formola generale, farà effa $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{ady}{2\sqrt{\frac{aa}{4} - yy}}$,

che ridotta in ferie fi trova effere

$= dy + \frac{2yydy}{aa} + \frac{6y^4dy}{a^4} + \frac{20y^6dy}{a^6} + \frac{70y^8dy}{a^8}$ ec., ed integrando,

grando, farà finalmente l'arco $AF =$

$$y + \frac{2y^3}{3aa} + \frac{6y^5}{5a^4} + \frac{20y^7}{7a^6} + \frac{70y^9}{9a^8} \text{ ec.}$$

Che fe il raggio foffe ftato $= a$, farebbe la ferie

$$y + \frac{y^3}{2 \times 3aa} + \frac{3y^5}{2 \times 4 \times 5a^4} + \frac{15y^7}{2 \times 4 \times 6 \times 7a^6} + \frac{105y^9}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9a^8} \text{ ec.}$$

E fe finalmente farà $DB = x$, DA raggio $= a$, farà $y = \sqrt{aa - xx}$, e $dy = \frac{-xdx}{\sqrt{aa - xx}}$, adunque $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$, e riducendo in ferie, farà

$$\frac{adx}{\sqrt{aa - xx}} = dx + \frac{xxdx}{2aa} + \frac{3x^4dx}{2 \times 4a^4} + \frac{15x^6dx}{2 \times 4 \times 6a^6} + \frac{105x^8dx}{2 \times 4 \times 6 \times 8a^8} \text{ ec.},$$ ed integrando, farà l'arco $EF =$

$$x + \frac{x^3}{2 \times 3aa} + \frac{3x^5}{2 \times 4 \times 5a^4} + \frac{15x^7}{2 \times 4 \times 6 \times 7a^6} + \frac{105x^9}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9a^8} \text{ ec.}$$

ESEM-

ESEMPIO XX.

112. Sia l'ellissi ADC, (*Fig.* 28.) semiasse trasverso $AB = a$, semiasse conjugato $BD = b$, $BE = x$, $EO = y$, sarà l'equazione $\frac{aayy}{bb} = aa - xx$, e però $ydy = -\frac{bbxdx}{aa}$, e $dy^2 = \frac{bbxxdx^2}{aa \times \overline{aa - xx}}$, e la formola generale $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{bbxxdx^2}{a^4 - aaxx}} = \frac{dx\sqrt{a^4 - aaxx + bbxx}}{a\sqrt{aa - xx}}$.

Se in luogo di sostituire il valore di dy dato per x dall' equazione, sostituiremo il valore di dx, sarà $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy\frac{\sqrt{aayy - bbyy + b^4}}{b\sqrt{bb - yy}}$. Ma e l'una, e l'altra delle due ritrovate espressioni manca di una delle condizioni del num. 38., senza di cui si è veduto, che queste formole non si possono liberare dai segni radicali, e preparare per l'integrazioni. Adunque per passare alle serie,

prendo una delle due formole, per esempio $\frac{dx\sqrt{a^4 - aaxx + bbxx}}{a\sqrt{aa - xx}}$, la quale si esprime con l'equivalente $dx\sqrt{1 + \frac{bbxx}{a^4 - aaxx}}$, e questa ridotta in serie sarà $= dx + \frac{\frac{1}{2}bbxxdx}{aa \times \overline{aa - xx}} - \frac{\frac{1}{8}b^4x^4dx}{a^4 \times \overline{aa - xx}^2} + \frac{\frac{1}{16}b^6x^6dx}{a^6 \times \overline{aa - xx}^3} - \frac{\frac{5}{128}b^8x^8dx}{a^8 \times \overline{aa - xx}^4}$ ec., e riducendo in oltre in serie ciascun termine di questa, cominciando dal secondo, sarà

$$dx\sqrt{1 + \frac{bbxx}{a^4 - aaxx}} = dx$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}bbxxdx}{aa} \times \overline{\frac{1}{aa} + \frac{xx}{a^4} + \frac{x^4}{a^6} + \frac{x^6}{a^8} \text{ ec.}}$$
$$- \frac{\frac{1}{8}b^4x^4dx}{a^4} \times \overline{\frac{1}{a^4} + \frac{2xx}{a^6} + \frac{3x^4}{a^8} + \frac{4x^6}{a^{10}} \text{ ec.}}$$
$$+ \frac{\frac{1}{16}b^6x^6dx}{a^6} \times \overline{\frac{1}{a^6} + \frac{3xx}{a^8} + \frac{6x^4}{a^{10}} + \frac{10x^6}{a^{12}} \text{ ec.}}$$
$$- \frac{\frac{5}{128}b^8x^8dx}{a^8} \times \overline{\frac{1}{a^8} + \frac{4xx}{a^{10}} + \frac{10x^4}{a^{12}} + \frac{20x^6}{a^{14}} \text{ ec.}}$$

ed

ed integrando, sarà l'arco DO, cioè

$$\int dx \sqrt{\frac{1+bbxx}{a^4-aaxx}} = x + \frac{\frac{1}{2}bb}{aa} \times \overline{\frac{x^3}{3aa} + \frac{x^5}{5a^4} + \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9a^8} \text{ ec.}}$$

$$-\frac{\frac{1}{8}b^4}{a^4} \times \overline{\frac{x^5}{5a^4} + \frac{2x^7}{7a^6} + \frac{3x^9}{9a^8} + \frac{4x^{11}}{11a^{10}} \text{ ec.}}$$

$$+\frac{\frac{1}{16}b^6}{a^6} \times \overline{\frac{x^7}{7a^6} + \frac{3x^9}{9a^8} + \frac{6x^{11}}{11a^{10}} \text{ ec.}}$$

$$-\frac{\frac{5}{128}b^8}{a^8} \times \overline{\frac{x^9}{9a^8} + \frac{4x^{11}}{11a^{10}} \text{ ec.}},$$

e finalmente riducendo alla stessa denominazione i termini omogenei, troveremo $DO =$

$$x + \frac{bbx^3}{6a^4} + \frac{\overline{4aabb - b^4} \times x^5}{40a^8} + \frac{\overline{8a^4bb - 4aab^4 + b^6} \times x^7}{112a^{12}} +$$

$$\frac{\overline{64a^6bb - 48a^4b^4 + 24aab^6 - 5b^8} \times x^9}{9 \times 128a^{16}} \text{ ec.}$$ Che se vogliasi supporre $a = b$, nel qual caso l'ellissi diviene un circolo, sarà l'arco $DO = x + \frac{x^3}{6aa} + \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{5x^7}{112a^6} + \frac{35x^9}{9 \times 128a^8}$ ec. appunto come sopra al num. 111.

In

In altra maniera ancora. Nella formola $\frac{dx\sqrt{a^4 - aaxx + bbxx}}{a\sqrt{aa - xx}}$ si faccia $bb - aa = -cc$, onde sia $\frac{dx\sqrt{a^4 - ccxx}}{a\sqrt{aa - xx}}$; risolùti in serie i due radicali, sarà

$$\frac{dx\sqrt{a^4 - ccxx}}{a\sqrt{aa - xx}} = \frac{dx}{a} \times \frac{aa - \frac{ccxx}{2aa} - \frac{c^4x^4}{8a^6} - \frac{c^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{14}} \text{ ec.}}{a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{ ec.}}$$

e facendo attualmente la divisione del numeratore per lo denominatore, dopo un lunghissimo calcolo troveremo un'altra serie, la quale integrata, e restituito in luogo di cc il suo valore, ci darà la medesima serie di sopra, che esprime il valore dell'arco DO.

ESEMPIO XXI.

113. Sia l'iperbola BD, (*Fig.* 29.) semiasse trasverso $AB = a$, semiasse conjugato $AE = b$, $CD = y$, $AC = x$, sarà l'equazione $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$; adunque differenziando sarà $dx = \frac{aydy}{b\sqrt{bb + yy}}$, on-

de

de $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy \sqrt{1 + \frac{aayy}{b^4 + bbyy}} = \frac{dy}{b} \frac{\sqrt{bbyy + aayy + b^4}}{\sqrt{bb + yy}}$,

e però ridotta questa in serie o nell'una, o nell'altra maniera usata intorno all'ellissi, troveremo essere il suo integrale, cioè l'arco $BD = y + \frac{aay^3}{6b^4} - \frac{4aabb - a^4 \times y^5}{40b^8} + \frac{8aab^4 + 4a^4bb + a^6 \times y^7}{112b^{12}} - \frac{64aab^6 - 48a^4b^4 - 24a^6bb - 5a^8 \times y^9}{9 \times 128b^{16}}$ ec.,

che è la stessa serie dell'ellissi, a riserva de' segni, e della mutazione delle veci delle costanti a, b.

ESEMPIO XXII.

114. Sia la cicloide dell' Esempio VIII. delle quadrature, (*Fig.* 16.) la di cui equazione sapiamo essere $dy = \frac{dx \sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}$; adunque sarà la formola $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx \sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, e però integrando, sarà l'arco $FA = 2\sqrt{ax} =$ al doppio della corda AS del corrispondente arco di circolo AS, e posta $x = a$, sarà AM doppia del diametro del circolo generatore, e però tutta la cicloide quadrupla.

ESEMPIO XXIII.

115. Sia la trattoria ABF, (*Fig.* 20.) la di cui equazione (num. 103.) è $-\frac{ydu}{dy}=a$; dunque $du=-\frac{ady}{y}$, ed integrando, un qualunque arco $AB=u=-ly\pm n$ nella logaritmica della sottotangente $=a$; ma fatta $u=0$, è $y=a$, e $ly=0$, dunque $n=0$, e l'integrale compito sarà $u=-ly$. Se pertanto con la sottotangente AE, per lo punto A, all'asintoto MH si descriva la logaritmica AKS, preso un qualunque punto B nella trattoria, e condotta alla logaritmica la BK parallela all'asintoto, ed abbassata la normale KN, l'intercetta NE sarà eguale all'arco AB.

ESEMPIO XXIV.

116. Sia la spirale d'Archimede ACB del num. 104.; (*Fig.* 21.) il raggio del circolo $=a$, la circonferenza $=b$, l'arco $BMD=x$, $AC=y$. Sia AE infinitamente prossima ad AD, e però $DE=dx$. Col centro A sia descritto l'arco CH, sarà $CH=\frac{ydx}{a}$,

ed

ed $OH = dy$; adunque sarà CO l'elemento della curva $= \frac{\sqrt{yydx^2 + aady^2}}{a}$, ma l'equazione della curva è $ax = by$, e però $dx^2 = \frac{bbdy^2}{aa}$, onde, fatta la sostituzione, sarà $CO = \frac{dy}{aa} \sqrt{a^4 + bbyy}$, il di cui integrale, dopo un lungo calcolo, che ommetto per brevità, troveremo dipendere da' logaritmi, o sia dalla quadratura dell'iperbola.

Per mezzo delle serie. Faccio in primo luogo $a^4 = bbmm$, onde la formola sia questa $\frac{bdy}{aa} \sqrt{mm + yy}$, che ridotta in serie è $=$

$\frac{bdy}{aa} \times \overline{m + \frac{yy}{2m} - \frac{y^4}{8m^3} + \frac{y^6}{16m^5} - \frac{5y^8}{128m^7}}$ ec., e però integrando, cioè l'arco AC sarà $= \frac{bmy}{aa} + \frac{by^3}{6aam} - \frac{by^5}{40aam^3} + \frac{by^7}{112aam^5} - \frac{5by^9}{9 \times 128aam^7}$ ec., e fatta $y = a$, sarà tutta la curva $ACB = \frac{bm}{a} + \frac{ab}{6m} - \frac{a^3b}{40m^3} + \frac{a^5b}{112m^5} - \frac{5a^7b}{9 \times 128m^7}$ ec., cioè restituendo in luogo di m il valore $\frac{aa}{b}$, $ACB =$

$a + \frac{bb}{6a} - \frac{b^4}{40a^3} + \frac{b^6}{112a^5} - \frac{5b^8}{9 \times 128a^7}$ ec.

Se la curva foſſe la logaritmica ſpirale ABC, (*Fig.* 30.) la di cui equazione $ady = bdx$, chiamando $RB = y$, e l'archetto infiniteſimo $BD = dx$, poſto nella formola generale $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ il valore di dx dato dall' equazione, ſarà eſſa $\frac{dy \sqrt{aa + bb}}{b}$, ed integrando, la curva $AB = \frac{y}{b} \sqrt{aa + bb}$.

Sia la curva ABC la ſpirale iperbolica, in cui la ſottangente deve ſempre eſſere coſtante, e però l'equazione, denominando come ſopra, $ydx = ady$, ſarà dunque $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{y} \sqrt{aa + yy}$; l'integrale della qual formola, liberata che ſia dal ſegno radicale, troveremo dipendere dalla logaritmica.

Per mezzo della ſerie troveremo $\frac{dy}{y} \sqrt{aa + yy} = \frac{ady}{y} + \frac{ydy}{2a} - \frac{y^3 dy}{8a^3} + \frac{y^5 dy}{16a^5} - \frac{5y^7 dy}{128a^7}$ ec.; ma volendo paſſare all'integrazioni, il primo termine non è integrabile, ſe non per mezzo d'un'altra ſerie infinita; adunque la ſomma della ſopraſcritta ſerie integrata, eccetto il primo termine, con l'integrale della ſerie, che eſprime eſſo primo termine, formerà una ſerie, che ſarà il valore della propoſta curva.

ESEM-

ESEMPIO XXV.

117. Sia la logaritmica HBD, (*Fig.* 19.) AB ſottangente $= a$, $AK = x$, $KH = y$, e l'equazione $\frac{ady}{y} = dx$. Poſto nella formola generale il valore di dx, ſarà $\frac{dy}{y} \sqrt{aa + yy}$, il di cui integrale dipende dalla ſteſſa logaritmica. Ommetto l'uſo delle ſerie, che abbaſtanza s'è veduto ne' ſuperiori Eſempj.

ESEMPIO XXVI.

118. Sia la parabola apolloniana con le coordinate in angolo obbliquo dell'equazione $ax = yy$. Differenziata queſta, e ſoſtituito nella formola generale delle rettificazioni, quando le coordinate ſono in angolo obbliquo, cioè nella formola $\sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$, in luogo di dx, e di dx^2 il loro valore dato per y, ſi avrà $\frac{2dy}{a} \sqrt{yy + \frac{aey}{m} + \frac{aa}{4}}$, il di cui integrale è in parte algebraico, ed in parte dipende dalla quadratura dell' iperbola.

ESEMPIO XXVII.

119. Sia l'equazione $\frac{x^t}{t} = y$ alle infinite parabole, ed alle infinite iperbole fra gl'asintoti. Differenziando sarà $x^{t-1}dx = dy$, ed $x^{2t-2}dx^2 = dy^2$, onde $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, elemento della curva, $= dx\sqrt{x^{2t-2}+1}$. Passando all'integrazioni, per valermi del metodo del num. 61. espongo la formola nel seguente modo $\frac{dx}{\overline{x^{2t-2}+1}^{-\frac{1}{2}}}$.

La formola canonica $\frac{x^n dx}{\overline{x^m + a^m}^{m}}$ del suddetto numero è integrabile algebraicamente quando sia $\frac{1-m+n}{m}$ numero intiero affermativo; e se sia intiero negativo, si ridurrà alle note semplici quadrature. Paragonando questa formola $\frac{dx}{\overline{x^{2t-2}+1}^{-\frac{1}{2}}}$ con la canonica, si â $n = 0$, $2t - 2 = m$, $a =$ all'unità; per lo che converrà, che sia $\frac{1-2t+2}{2t-2}$ numero intiero, che chiamo h, dunque $\frac{1-2t+2}{2t-2}$, cioè $\frac{3-2t}{2t-2} = h$, e conseguentemen-

te

te $\frac{3 + 2h}{2 + 2h} = t$, eſponente determinatore delle curve infinite.

Sia h numero poſitivo intiero, principiando dal nulla. Se $h = 0$, ſarà $t = \frac{3}{2}$; ſe $h = 1$, ſarà $t = \frac{5}{4}$; ſia h qualunque numero della ſerie de' numeri naturali 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ec., ſaranno eſpreſſi gl' innumerabili valori dell' eſponente t dalla ſeguente progreſſione $t = \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \frac{11}{10}$ ec. L'andamento della ſerie è manifeſto, ed in tutti queſti caſi le curve paraboliche ſono algebraicamente rettificabili, e la prima di eſſe è la ſeconda parabola cubica.

Sia h eguale ad un numero intero negativo, ed in primo luogo ſia $h = -0$, torna in campo la ſeconda parabola cubica, equivalendo -0 al $+0$; ſia $h = -1$, l'eſponente t diventa eguale ad $\frac{1}{0}$, e di conſeguenza infinito; ſia $n = -2$, ſarà $t = \frac{1}{2}$; ſia $h = -3$, ſarà $t = \frac{3}{4}$, e così di mano in mano, e gl'infiniti valori dell' eſponente t ſaranno eſpreſſi dalla progreſſione $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}$ ec., e le curve parabolice indi naſcenti rettificabili per via delle note quadrature.

La

La prima curva, che ci si affaccia, è la parabola conica, la di cui rettificazione richiede (num. 110.) la quadratura dell' iperbola.

L'altro caso, in cui la formola generale del num. 61., o è integrabile algebraicamente, o per mezzo delle note quadrature, è che $u - \frac{1}{m} - 1 - \frac{n}{m}$ sia numero intero, cioè, sostituendo le spezie particolari di questo esempio, $-\frac{3t + 2}{2t - 2} = h$, e però $\frac{2 + 2h}{3 + 2h} = t$, esponente determinatore delle curve infinite.

Sia h numero intiero positivo, principiando dal zero, averemo la seguente progressione

$$t = \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11} \text{ ec.}$$

Sia h intiero negativo, ed in primo luogo sia $h = -0$, torna in campo lo stesso esponente $t = \frac{2}{3}$, equivalendo -0 al $+0$; sia $h = -1$, l'esponente t diventa eguale alla frazione $\frac{0}{1}$, e di conseguenza nullo; sia $h = -2$, $h = -3$ ec., averemo la seguente progressione $t = \frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{10}{9}$ ec.

La frazione, che dà il valore dell'esponente determinatore t, è la stessa nell'uno, e nell'altro caso, solo che nel secondo è inversa del primo, dal che doveva-

no

no nascere, come di fatto sono nate inverse le progressioni; le curve adunque scoperte per mezzo dell'una, e dell'altra formola sono le medesime, ma con gl'esponenti inversi, vale a dire riferite a due assi differenti; a cagion d'esempio i due esponenti $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$ appartengono alla parabola apolloniana, che in due maniere ci si presenta $x^{\frac{1}{2}} = y$, vale a dire $x = yy$; ed in oltre $xx = y$, equazione locale al trilineo parabolico.

Quelle curve pertanto, che sono inchiuse nelle premesse progressioni, o sono integrabili algebraicamente, o non esiggono quadrature oltre il circolo, e l'iperbola; ma le altre infinite richieggono tetragonismi più alti.

Dalle nostre progressioni appare, che il valore dell'esponente t non è mai negativo, onde nessuna iperbola non ammette rettificazione nè algebraica, nè dipendente dalle mentovate più semplici quadrature.

Delle Cubature.

ESEMPIO XXIII.

120. Sia il cono retto $ACGKA$; (*Fig.* 31.) $AB = a$, $BC = b$, una qualunque porzione AD dell'asse AB sia $= x$, sarà

farà y, cioè $DE = \frac{bx}{a}$, e però nella formola generale $\frac{cyydx}{2r}$ sostituito questo valore in luogo di y, farà essa $\frac{cbbxxdx}{2aar}$, ed integrando $\frac{cbbx^3}{6aar}$, rispetto ad una qualunque porzione presa dal vertice (ommessa la costante superflua), e fatta $x = a$, farà tutto il cono $ACGKA = \frac{cbba}{6r} = \frac{cbb}{2r} \times \frac{a}{3}$, cioè eguale al prodotto della base nella terza parte dell'altezza.

E perchè la solidità de' cilindri è il prodotto della base nell'altezza, farà il cilindro al cono inscritto, come 3 ad 1.

Il cono $ACGKA$ è adunque $= \frac{cbba}{6r}$, ed il cono $AIEMP = \frac{cbbx^3}{6aar}$, adunque il frusto di cono $IMCK$ farà $\frac{cbb}{6r} \times \overline{a - \frac{x^3}{aa}}$, e però farà a tutto il cono nella ragione di $a^3 - x^3$ ad a^3; onde se per esempio faremo $AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a$, farà il frusto a tutto il cono, come $a^3 - \frac{a^3}{8}$, a^3; cioè come 7, 8, ed al cono $AEMPI$, come 7, 1.

Ogni qual volta però si pensa a misurare qualche solido, fa di mestieri considerare, di quali elementi inten-

tendiamo, ch'egli ſia compoſto giuſta le differenti ſezioni, che poſſono adoprarſi, tornando in acconcio ora l'una, ora l'altra ſecondo le circoſtanze; indi fra i ſuddetti elementi ſcegliere quelli, che con maggiore facilità poſſono maneggiarſi, ed a' quali più naturalmente il calcolo s'adatta. Nel cono retto, per eſempio, di cui ſi tratta, vi ſono tanti circoli paralleli alla baſe; ed oltre ciò tanti triangoli, che ânno comune il vertice con quello del cono, e per baſe le ordinate parallele del circolo CGK; ſi può ancora tagliare il cono con tante parabole fra loro equidiſtanti, e cogl'aſſi paralleli al lato AK, ed altre molte ſezioni poſſono farſi.

Egli è bensì vero, che per ritrovare la ſolidità del cono sì fatti mezzi devono riputarſi fuor di propoſito, e troppo compoſti per lo propoſto caſo; ma ſi potrebbe proporre di tagliare il cono, o altro ſolido con un piano qualunque, ed indi miſurare i due pezzi, in cui egli è diviſo, ed in queſto caſo conviene far uſo di quelli elementi, che a tale ſezione corriſpondono, come ſi vedrà negl'eſempj 37., e 38.

ESEMPIO XXIX.

121. Sia il femicircolo CDK, (*Fig.* 32.) che s'aggiri attorno al raggio immobile DB, onde produca un'emisfero, e fia $DB = a$, $DA = x$, farà $AE = y = \sqrt{2ax - xx}$. Softituito adunque quefto valore nella formola generale, farà effa $\frac{cdx}{2r} \times \overline{2ax - xx}$, ed integrando, farà la folidità del fegmento indefinito $AEM = \frac{3caxx - cx^3}{6r}$, e fatta $x = a$, farà la folidità dell'emisfero $= \frac{ca^3}{3r}$, ed il doppio $\frac{2ca^3}{3r}$ tutta la sfera.

E perchè il cilindro, la di cui altezza eguale al diametro della bafe fia $= 2a$, è $= \frac{ca^3}{r}$, farà il cilindro circofcritto alla sfera infcritta, come $\frac{ca^3}{r}$ a $\frac{2ca^3}{3r}$ :: 3, 2, ed in confeguenza nella fteffa ragione la metà del cilindro all'emisfero. Ma il cono pure, la di cui altezza eguale al raggio della bafe fia $= a$, raggio della sfera, è $= \frac{ca^3}{6r}$, adunque farà l'emisfero al cono infcritto, come 2, 1.

In

In oltre essendo, come è noto, $= \frac{\sqrt{3aa}}{2}$ il raggio della base del cono equilatero inscritto nella sfera, il di cui raggio sia $= a$, ed essendo l'altezza di esso $= \frac{3a}{2}$, sarà il cono $= \frac{9ca^3}{48r}$, e la sfera sarà $= \frac{2ca^3}{3r}$, e però la sfera al cono come $\frac{2}{3}$, $\frac{9}{48}$, cioè, come 32 al 9. In simil modo si possono dimostrare quanti teoremi si vogliono d'Archimede in questo proposito.

E' chiara la maniera di avere un qualunque settore di sfera generato per esempio dal settore $BEDM$ del circolo; imperciocchè al segmento di sfera generato dalla figura AED, che si fa essere $= \frac{3caxx - cx^3}{6r}$, s'aggiunga il cono generato dal triangolo EBA, e che si troverà essere $= \frac{c}{6r} \times \overline{2ax - xx} \times \overline{a - x}$, e la somma, cioè $\frac{caax}{3r}$ sarà il settore cercato.

ESEMPIO XXX.

122. Sia (*Fig.* 33.) la parabola di qualunque ordine, la di cui equazione $y^m = a^{m-1}x$, la quale ruotandosi attorno all'asse AM generi il conoide parabolico. Sarà

dunque $y = a^{\frac{m-1}{m}} x^{\frac{1}{m}}$, ed $yy = a^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{2}{m}}$, e però la formola generale, sostituito questo valore, sarà $\frac{ca^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{2}{m}} dx}{2r}$, ed integrando, $\frac{mca^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{m+2}{m}}}{2r \times \overline{m+2}}$ la solidità del conoide indefinito; o pure, perchè $x^{\frac{2}{m}} = \frac{yy}{a^{\frac{2m-2}{m}}}$, e però $x^{\frac{2+m}{m}} = \frac{xyy}{a^{\frac{2m-2}{m}}}$, sostituendo questo valore nell' integrale ritrovato, sarà esso $\frac{mcxyy}{2r \times \overline{m+2}}$.

Sia $m = 2$, cioè la parabola apolloniana, sarà il conoide $= \frac{cxyy}{4r}$, cioè il prodotto della base nella metà dell'altezza, ed in conseguenza il detto conoide sarà la metà del cilindro nella medesima altezza, e nella medesima base.

Se si volesse la solidità della scodella, o sia il solido generato dalla figura *ACD* mossa attorno all' asse *AB*, dal cilindro descritto dal rettangolo *ABCD*, che sapiamo essere $= \frac{cxyy}{2r}$, si sottragga il conoide parabolico $\frac{mcxyy}{2r \times \overline{m+2}}$, il residuo $\frac{cxyy}{r \times \overline{m+2}}$ sarà la scodella. E fat-

ta

ta $m = 2$ riſpetto alla parabola apolloniana, ſarà la ſcodella $\frac{cxyy}{4r}$ metà del cilindro, appunto come deve eſſere, il conoide eſſendo pure la metà d'eſſo cilindro.

Si muova la figura attorno all'ordinata MO; e ſia $AM = b$, $MO = f$, $AB = x$, $BC = y$, $CK = b - x$, $KO = f - y$. Sarà il circolo del raggio $CK = \frac{c}{2r} \times \overline{b - x}^{2}$, adunque il prodotto di queſto circolo in dy, differenziale di KM, cioè $\frac{c}{2r} \times \overline{bbdy - 2bxdy + xxdy}$ ſarà l'elemento del ſolido generato dalla figura $MACK$, e però integrando, poſto in luogo di x il valore dato per y, ſarà $\frac{c}{2r} \times \overline{bby - \frac{2by^{m+1}}{\overline{m+1} \times a^{m-1}} + \frac{y^{2m+1}}{\overline{2m+1} \times a^{2m-2}}}$ = al ſolido indefinito, o pure, ponendo x in luogo di $\frac{y^{m}}{a^{m-1}}$, $\frac{c}{2r} \times \overline{bby - \frac{2bxy}{m+1} + \frac{xxy}{2m+1}}$. E poſta $x = b$, $y = f$ riſpetto a tutto il ſolido generato dalla figura $ACOM$, ſarà $\frac{c}{2r} \times \overline{bbf - \frac{2bbf}{m+1} + \frac{bbf}{2m+1}}$, cioè $\frac{2mmbbf}{\overline{2m+1} \times \overline{m+1}} \times \frac{c}{2r}$.
E ſe ſi vuole, che la parabola ſia apolloniana, cioè che ſia $m = 2$, ſarà il ſolido $= \frac{4cbbf}{15r}$.

E' facile il vedere, che nella parabola apolloniana il cilindro sulla medesima base, ed altezza del detto solido sarà al solido, come 15, 8; e che il solido generato dalla figura OAP sarà $= \frac{7cbbf}{30r}$.

Si muova la figura attorno alla retta AP; e sia, come sopra, $AB = x$, $BC = y$, sarà $\frac{cxx}{2r}$ il circolo del raggio DC; adunque $\frac{cxxdy}{2r}$ l'elemento del solido generato dalla figura ACD, e ponendo in luogo di x il valore dato per y, ed integrando, sarà $\frac{c}{2r} \times \frac{y^{2m+1}}{\overline{2m+1} \times a^{2m-2}}$, cioè $\frac{c}{2r} \times \frac{xxy}{2m+1}$ eguale al solido indefinito, e fatta $x = b$, $y = f$, sarà $\frac{cbbf}{2r \times \overline{2m+1}}$ rispetto a tutto il solido generato dalla figura AOP.

Ma il cilindro nella medesima base, ed altezza è $= \frac{cbbf}{2r}$, sarà adunque il solido generato dalla figura $AMO = \frac{c}{2r} \times \frac{2mbbf}{2m+1}$.

Ma in altra maniera ancora si può avere il solido generato dalla figura AOM ruotata attorno all'asse AB. Sia $AM = b$, $MO = f$. Il circolo del raggio DC sarà $= \frac{cxx}{2r}$, ed il circolo del raggio DK sarà $\frac{cbb}{2r}$;

adun-

adunque sarà $\frac{c}{2r} \times \overline{bb - xx}$ l'anello descritto dalla linea CK, adunque $\frac{c}{2r} \times \overline{bb - xx} \times dy$ sarà l'elemento del solido generato dalla figura $CKMA$, e posto in luogo di x il valore dato per y, sarà $\frac{c}{2r} \times \overline{bbdy - \frac{y^{2m}dy}{a^{2m-2}}}$, ed integrando, $\frac{c}{2r} \times \overline{bby - \frac{y^{2m+1}}{\overline{2m+1} \times a^{2m-2}}}$, e finalmente fatta $y = f$ rispetto a tutto il solido generato dalla figura $AMOA$, sarà egli $\frac{c}{2r} \times \overline{bbf - \frac{f^{2m+1}}{\overline{2m+1} \times a^{2m-2}}}$; ma quando $y = f$, sarà, per la parabola, x cioè $b = \frac{f^m}{a^{m-1}}$, e $bb = \frac{f^{2m}}{a^{2m-2}}$, adunque posto nell'integrale questo valore dato per b, sarà il solido =

$$\frac{c}{2r} \times \overline{bbf - \frac{bbf}{2m+1}} = \frac{c}{2r} \times \frac{2mbbf}{2m+1}, \text{come sopra.}$$

ESEM-

ESEMPIO XXXI.

123. Sia l'ellissi ADC, (*Fig.* 28.) $AB = a$, $BD = b$, $AE = x$, $EO = y$, e però l'equazione $\frac{bb}{aa} \times \overline{2ax - xx} = yy$. Sostituito adunque nella formola generale il valore di y dato dall'equazione, sarà essa $\frac{cbb}{2aar} \times \overline{2axdx - xxdx}$, ed integrando, sarà $\frac{cbb}{2aar} \times \overline{axx - \frac{x^3}{3}}$ eguale al solido indefinito generato dalla figura AEO mossa attorno all'asse AC. Posta $x = a$, sarà $\frac{cbba}{3r}$ metà dello sferoide; e posta $x = 2a$, sarà $\frac{2cbba}{3r}$ tutto lo sferoide.

E perchè il cono nella medesima altezza AC, e nella base, il di cui raggio sia il semiasse conjugato BD, è $= \frac{cbba}{3r}$, ed il cilindro è $= \frac{cbba}{3}$, sarà lo sferoide due terzi del cilindro, e doppio del cono.

ESEMPIO XXXII.

124. Sia l'iperbola AD, (*Fig.* 25.) che s'aggiri attorno a BC, e ſia il ſemiaſſe traſverſo $BA = \frac{a}{2}$, il centro B, ed il parametro $= b$, $AC = x$, $CD = y$, e l'equazione $\overline{ax + xx} \times \frac{b}{a} = yy$. Soſtituito il valore di y nella formola generale, ſarà $\frac{cbdx}{2ar} \times \overline{ax + xx}$, ed integrando, ſarà $\frac{cb}{2ar} \times \overline{\frac{axx}{2} + \frac{x^3}{3}}$ eguale al conoide iperbolico indefinito generato dalla figura ADC.

Sia $BC = x$, il reſto come ſopra. Sarà l'equazione $\frac{b}{a} \times \overline{xx - \frac{aa}{4}} = yy$, e però la formola ſarà $\frac{cbdx}{2ar} \times \overline{xx - \frac{aa}{4}}$, ed integrando, $\frac{cb}{2ar} \times \overline{\frac{x^3}{3} - \frac{aax}{4}} + f$.

Aggiungo la coſtante, che in queſto caſo non è zero. Per determinarla ſi avverta, che nel punto A, quando $x = \frac{1}{2} a$, il ſolido deve eſſere nullo, onde poſto nell'integrale $\frac{1}{2} a$ in luogo di x, dovrà eſſere $f + \frac{cb}{2ar} \times \overline{\frac{a^3}{24} - \frac{a^3}{8}} = 0$, adunque $f = \frac{caab}{24r}$; e però l'in-

tegrale compito sarà $\frac{cb}{2ar} \times \overline{\frac{x^3}{3} - \frac{aax}{4} + \frac{a^3}{12}}$.

S' aggiri l' iperbola attorno al semiasse conjugato HB, e sia BA semiasse trasverso $= a$, il semiasse conjugato $= b$, $BC = x$, $CD = y$. Il circolo del raggio HD sarà $= \frac{cxx}{2r}$, adunque $\frac{cxxdy}{2r}$ sarà l' elemento del solido generato dal piano, o sia figura $BHDA$, e posto in luogo di xx il valore dato dall' equazione della curva, avremo $\frac{cdy}{2r} \times \overline{\frac{aayy + aabb}{bb}}$, ed integrando, $\frac{c}{2r} \times \overline{\frac{aay^3}{3bb} + aay}$, e fatta $y = b$, sarà il solido $= \frac{2caab}{3r}$.

ESEMPIO XXXIII.

125. Sia l'iperbola KHF (*Fig.* 34.) fra gl'asintoti, $AD = a$, $DE = b$, $AP = x$, $PH = y$, e l'equazione $xy = ab$. Si muova la curva attorno all'asintoto AB. Adunque il circolo del raggio QH sarà $= \frac{cxx}{2r}$, e però $\frac{cxxdy}{2r}$ sarà l'elemento del solido generato dalla figura $AQHFMA$ infinitamemte prodotta della parte di M, e posto in luogo di x il valore dato dall' equazio-

ne,

ne, sarà $\frac{caabbdy}{2ryy}$, ed integrando, $f - \frac{caabb}{2ry}$; ma per determinare la f, si osservi che quando sia $y = 0$, il solido deve essere $= 0$, adunque $f = \frac{caabb}{2r \times 0}$, quantità infinita, e però l'integrale compito sarà $- \frac{caabb}{2ry} + \infty$, adunque il solido di valore infinito.

Se in vece di sostituire nella formola in luogo di xx il valore dato per y dall'equazione, sostituiremo il valore di dy, sarà essa $- \frac{abcdx}{2r}$, ed integrando, $- \frac{abcx}{2r} + f$; ma il solido non può essere zero se non quando sia x infinita, adunque la costante f da aggiungersi deve essere infinita, e però infinito il solido.

Per avere il solido generato dal piano, o figura $BAPHK$ infinitamente prodotta verso B, basta riflettere, che essendo $\frac{cx}{r}$ la periferia del circolo, il di cui raggio è $QH = x$, sarà $\frac{cxy}{r}$ la superficie del cilindro generato dal piano $AQHP$, ed in conseguenza sarà $\frac{cxydx}{r}$ la solidità del cilindro vuoto generato dal rettangolo infinitesimo $IPHO$; adunque la somma di tutti questi, cioè $\int \frac{cxydx}{r}$ sarà il solido, che si cerca.

 Po-

Posto adunque in luogo di y il suo valore $\frac{ab}{x}$, sarà l'integrale $\frac{cabx}{r}$ quantità finita, quantunque il solido sia infinitamente alto.

Nell'espressione $\frac{cabx}{r}$ del solido posto in luogo di ab il valore xy dato dall'equazione, sarà $\frac{cxxy}{r}$, ma $\frac{cxxy}{2r}$ è il cilindro generato dal rettangolo $APHQ$; adunque il solido iperbolico sarà doppio di esso cilindro, e però il solido generato dalla figura $BQHK$ infinitamente prodotta sarà eguale al cilindro, che gli serve di base. Presa adunque $x = a$, ed in conseguenza $y = b$, sarà il cilindro $= \frac{caab}{2r} =$ al solido sopra di esso.

ESEMPIO XXXIV.

126. Sia la logaritmica HCD, (*Fig.* 35.) la sottangente $CA = a$, $AB = x$, $BD = y$, e l'equazione $dx = \frac{ady}{y}$. S'aggiri attorno all'asintoto EB. Posto nella formola generale in luogo di dx il valore dato dall'equazione, sarà $\frac{caydy}{2r}$, ed integrando, $\frac{cayy}{4r} + f$. Ma quando sia $y = AC = a$, il solido è zero; adunque deve

deve eſſere $f = -\frac{ca^3}{4r}$, e l'integrale compito, cioè il ſolido generato dal piano indefinito $ABDC$, ſarà $= \frac{cayy}{4r} - \frac{ca^3}{4r}$.

Sia l'aſſiſſa AE negativa, e però $= -x$, ſarà pure negativa la differenza cioè $-dx$, e perchè creſcendo l'aſſiſſa cala l'ordinata, ſarà pure negativa la differenza di EH, cioè $-dy$, e l'equazione della curva ſarà nello ſteſſo modo $dx = \frac{ady}{y}$. Ma per eſſere negativa dx, ſarà negativa la formola generale, vale a dire $-\frac{cyydx}{2r}$. Soſtituito adunque il valore di dx, ſarà $-\frac{caydy}{2r}$, ed integrando $-\frac{cayy}{4r} + f$; ma quando il ſolido è zero, ſarà $y = a$; adunque $f = \frac{ca^3}{4r}$, e l'integrale compito ſarà $\frac{ca^3}{4r} - \frac{cayy}{4r}$ eguale al ſolido generato dal piano $ACHE$. Poſto $y = 0$, cioè ſuppoſto il ſolido infinitamente prodotto dalla parte di M, l'integrale ſarà $= \frac{ca^3}{4r}$, adunque eſſo ſolido infinitamente prodotto ſarà eguale a $\frac{ca^3}{4r}$, ma il ſolido generato dal piano $ACHE$ abbiamo veduto eſſere $\frac{ca^3 - cayy}{4r}$, adunque il ſolido

infi-

infinitamente prodotto generato dal piano *LEHM* sarà $\frac{cayy}{4r}$.

Poichè il cilindro, il di cui raggio della base sia $AC = a$, e l'altezza pure $= a$, è $= \frac{ca^3}{2r}$, sarà il solido della logaritmica infinitamente prodotto dalla parte di *M* nella base del raggio $AC = a$ al detto cilindro, come $\frac{1}{4}, \frac{1}{2} :: 1, 2$.

ESEMPIO XXXV.

127. Sia la curva *AMI* (*Fig.* 18.) la Cissoide di Diocle, la quale aggirandosi attorno alla retta *AB* descriva un solido. Sia $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$, e l'equazione $yy = \frac{x^3}{a - x}$. Sarà adunque la formola generale de' solidi, sostituito il valore di yy, $\frac{cx^3 dx}{2r \times \overline{a - x}}$, ed integrando, $-\frac{cx^3}{6r} - \frac{caxx}{4r} - \frac{caax}{2r} - \frac{caa}{2r} l\, \overline{a - x} + f$; ma fatta $x = 0$, il solido deve essere zero, adunque $f = \frac{caa}{2r} l\, a$, e l'integrale compito $-\frac{cx^3}{6r} - \frac{caxx}{4r} - \frac{caax}{2r} - \frac{caa}{2r} l\, \overline{a - x} + \frac{caa}{2r} l\, a$ eguale al solido generato dalla

dalla figura APM, e fatta $x = a$, farà il folido intiero $= -\frac{11ca^3}{12r} - \frac{caa}{2r} l\,0 + \frac{caa}{2r} l\,a$. Ma il logaritmo del zero è quantità infinita, e negativa, che moltiplicata in $-\frac{caa}{2r}$ fa quantità pofitiva, adunque il folido intiero farà infinito. Si avverta, che i fuddetti logaritmi fi prendono nella logaritmica della fottangente $= a$.

Per mezzo della ferie farà $\frac{cx^3dx}{2r \times \overline{a-x}} = \frac{cx^3dx}{2ar} + \frac{cx^4dx}{2raa} + \frac{cx^5dx}{2ra^3} + \frac{cx^6dx}{2ra^4}$ ec., ed integrando, il folido generato dal piano APM farà $= \frac{cx^4}{8ar} + \frac{cx^5}{10raa} + \frac{cx^6}{12ra^3} + \frac{cx^7}{14ra^4}$ ec., e fatta $x = a$ rifpetto al folido intiero, farà $\frac{a^3}{2r} \times \overline{\frac{c}{4} + \frac{c}{5} + \frac{c}{6} + \frac{c}{7}}$ ec., ferie di valore infinito.

ESEMPIO XXXVI.

128. S'aggiri la trattoria ABF (*Fig.* 20.) attorno l'afintoto EH. Nella formola generale $\frac{cyydx}{2r}$ foftituito il valore della dx dato dall'equazione $dx = -\frac{dy\sqrt{aa-yy}}{y}$ num. 103., avremo $-\frac{cydy\sqrt{aa-yy}}{2r}$, ed

ed integrando, $\frac{c}{6r} \times \overline{aa - yy}^{\frac{3}{2}}$ = al solido generato dalla figura $AEDB$, ommessa l'aggiunta della costante superflua. Fatta pertanto $y = 0$, sarà il solido infinitamente prodotto $= \frac{ca^3}{6r}$; ma la solidità della sfera, il di cui raggio sia $AE = a$ (num. 121.) è $= \frac{2ca^3}{3r}$, dunque il solido infinitamente prodotto sarà la quarta parte di essa sfera.

ESEMPIO XXXVII.

129. Sia il cilindro $QBMCPT$, (*Fig.* 36.) da cui con un piano per BC diametro, e nella direzione AP si tagli la porzione, o sia l'unghia $BMCPB$, si cerca la solidità di questa.

Sia $BC = QM = 2a$, $MP = QT = b$, $AD = x$, e sarà DH condotta ordinata nel circolo $= \sqrt{aa - xx}$. Si tiri dal punto H parallelamente ad MP, o sia QT la retta HO, che sarà nella superficie del cilindro, indi dal punto D al punto O si conduca la retta DO, che sarà nel piano $BOPC$, avremo formato nella solidità dell'unghia il triangolo DHO simile al triangolo

lo AMP, e però sarà $HO = \frac{b\sqrt{aa - xx}}{a}$. Ma la somma di tutti questi triangoli DHO è appunto la ricercata solidità della metà dell'unghia, adunque sarà essa $= \int \frac{bdx}{2a} \times \overline{aa - xx}$, ed integrando, $\frac{abx}{2} - \frac{bx^3}{6a}$, e fatta $x = a$, sarà finalmente la suddetta metà dell'unghia $= \frac{1}{3}aab$, e tutta $= \frac{2}{3}aab$.

In altra maniera, e più generalmente sia (*Fig.* 37.) il mezzo cilindro $DACHEG$, il quale per lo diametro CD sia tagliato da un piano nella direzione DE, onde nasca l'unghia $DBCEAD$, di cui si vuole la solidità. Sia $BA = a$, $AE = b$, $BQ = x$, $QM = y$, sarà $QK = \frac{bx}{a}$, e però il rettangolo $PONM = \frac{2bxy}{a}$, e questo moltiplicato in dx sarà l'elemento della solidità dell'unghia, cioè $\frac{2byxdx}{a}$.

Sia la curva DAC un semicircolo, adunque $y = \sqrt{aa - xx}$, e la formola sarà $\frac{2bxdx}{a}\sqrt{aa - xx}$, ed integrando $-\frac{2b}{3a} \times \overline{aa - xx}^{\frac{3}{2}} + m$, ma la costante m, posta $x = 0$, si trova essere $= \frac{2}{3}baa$, adunque l'inte-

grale compito del solido sarà $\frac{2baa}{3} - \frac{2b}{3a} \times \overline{aa - xx}^{\frac{3}{2}}$, e fatta $x = a$ rispetto a tutta l'unghia, sarà essa $\frac{2baa}{3}$.

Sia la curva DAC una delle infinite parabole, e l'equazione $y^m = a - x$; sarà la formola, sostituito il valore di y, $\frac{2bxdx}{a} \times \overline{a - x}^{\frac{1}{m}}$, la quale integrata conforme al num. 29., ed aggiunta la debita costante, e fatta $x = a$, darà per la solidità di tutta l'unghia $\frac{2bmma^{\frac{m+1}{m}}}{\overline{2m+1} \times \overline{m+1}}$, e posta $m = 2$, cioè che la parabola sia l'apolloniana, $\frac{8ba^{\frac{3}{2}}}{15}$. E supposto, che quando $x = 0$, sia $BC = y = c$, sarà $a^{\frac{1}{2}} = c$, e però l'unghia $= \frac{8abc}{15}$. Nello stesso modo troverassi l'unghia del cilindro ellittico essere $= \frac{2abc}{3}$, supposto il semiasse trasverso $= a$, il semiasse conjugato $= c$ ec.

ESEM-

ESEMPIO XXXVIII.

130. Tagliato il conoide parabolico *BAC* (*Fig.* 38.) col piano qualunque *IEH* perpendicolare alla base circolare *BICH*, si dimanda la misura del pezzo compreso dalla sezione *IEH*, e dal piano a lei parallelo per l'asse *AD*.

Sia $= a$ il parametro della parabola generatrice *BAC*, l'assissa data $AD = b$, sarà l'ordinata $DB = \sqrt{ab}$. Sieno le coordinate $DF = x$, $FE = y$, e però l'equazione alla predetta curva *BAC* $ab - xx = ay$. Per la natura del circolo *BICH* sarà il rettangolo $CFB = ab - xx$, eguale al quadrato $FH = zz$; ma $ab - xx = ay$, dunque $ay = zz$, e conseguentemente la sezione *IEH* sarà una parabola con lo stesso parametro della principale. Resta pertanto fissato il rettangolo $EFH = yz = y\sqrt{ay}$; e perchè questo sta all'area *IEH*, come 3 a 4, sarà essa area $= \frac{4}{3} y\sqrt{ay}$, ed il prodotto di essa area *IEH* nell'altezza infinitesima dx, flussione di $DF = x$, sarà l'elemento del solido in questione, cioè $\frac{4}{3} ydx\sqrt{ay}$; ma $y = \frac{ab - xx}{a}$, dunque esso elemento

 sarà

ſarà $\frac{4}{3} dx \times \frac{\overline{ab - xx}}{a} \sqrt{ab - xx}$, o ſia $\frac{4}{3} bdx \sqrt{ab - xx} -$

$\frac{4}{3a} xxdx \sqrt{ab - xx}$.

L'integrale del primo termine dipende dalla quadratura del cerchio BHC; il ſecondo ſi ridurrà alle quadrature note per via della prima formola del num. 61.

131. Ommetto gli eſempj de' ſolidi generati da curve con le coordinate tra loro in angolo obbliquo, perchè eſſendo la formola per queſti caſi diverſa dalla ſolita, ed ordinaria per le ſole coſtanti, non ſi potranno incontrare difficoltà di natura diverſa dalle già ſpiegate. Così pure ommetto gl'eſempj de' ſolidi generati da curve riferite al fuoco, perchè non volendomi ſervire della teorìa de' centri di gravità, come ô detto di ſopra, biſognerà ridurre le date curve ad altre riferite agl'aſſi, intorno alle quali già abbaſtanza ſi è parlato.

Delle Quadrature, o ſia Compianazioni delle ſuperficie de' Corpi.

ESEMPIO XXXIX.

132. Sia il cono retto $ACGK$, (*Fig.* 31.) $AB = a$, $BC = b$, una qualunque porzione dell' aſſe AB, come

me AD, ſia $= x$, ſarà $DE = y = \frac{bx}{a}$, e $dy = \frac{bdx}{a}$, $dy^2 = \frac{bbdx^2}{aa}$. Soſtituito adunque queſto valore di dy^2 nella formola generale $\frac{cy}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2}$, ſarà $\frac{cy}{r} \sqrt{\frac{aadx^2 + bbdx^2}{aa}} = \frac{cydx \sqrt{aa + bb}}{ar}$, e ſoſtituito il valore di y, cioè $\frac{bx}{a}$, ſarà $\frac{cbxdx \sqrt{aa + bb}}{aar}$, ed integrando, $\frac{cbxx \sqrt{aa + bb}}{2aar}$ riſpetto alla ſuperficie del cono $AEMPI$; e fatta $x = a$, ſarà $\frac{cb \sqrt{aa + bb}}{2r}$ riſpetto alla ſuperficie di tutto il cono, e però eguale al rettangolo della metà della circonferenza della baſe nel lato AC.

La ſteſſa determinazione avrebbeſi avuta, ſe in luogo di ſoſtituire nella formola generale il valore di dy^2, ſi foſſe ſoſtituito il valore di dx^2.

Sarà per tanto la ſuperficie del fruſto conico $IMKCG = \frac{cb \sqrt{aa + bb}}{2r} - \frac{cbxx \sqrt{aa + bb}}{2aar}$, cioè $\frac{cb \sqrt{aa + bb}}{2raa} \times \overline{aa - xx}$; e però ſarà alla ſuperficie di tutto il cono, come $aa - xx$ ad aa.

133. Ma ſe il cono ſarà ſcaleno, biſognerà procedere

cedere in altra maniera . Onde ſia il cono ſcaleno $PAFBM$, (*Fig.* 39.) la baſe ſia il circolo $AFBM$, e nel diametro prodotto, ſe fa biſogno, s'abbaſſi la PD normale al piano del circolo, o ſia baſe. Si prendano nella periferìa del circolo due punti F, f infinitamente proſſimi, e ſi tirino i due lati FP, fP del cono. Egli è chiaro, che il triangolo infiniteſimo PFf ſarà la differenza, o ſia l'elemento della ſuperficie del cono. Adunque al punto F ſi conduca la tangente TFQ, a cui ſia normale DQ, e ſi congiungano i punti P, Q con la retta PQ.

Poichè il piano del triangolo PDQ paſſa per la retta PD normale al piano della baſe del cono, il piano PQD ſarà anch'egli normale allo ſteſſo piano della baſe, ma la tangente TQ, che è nel piano pure della baſe, fa angolo retto con QD comune ſezione de' due piani, dunque ſarà normale al piano PQD, ed in conſeguenza alla retta QP, e però ſarà il triangolo $PFf = \frac{PQ \times Ff}{2}$.

Si chiami il raggio $CA = r$, $CD = b$, $CE = x$, ſarà $FE = \sqrt{rr - xx}$, e perchè l'angolo CFT è retto, eſſendo tangente del circolo la TF, ſono ſimili i triangoli CFE, TCF; onde ſarà $CT = \frac{rr}{x}$, ma CT è alla

CF,

CF, o ſia CF, $CE :: TD$, DQ, adunque $DQ = \frac{rr + bx}{r}$. Sia la data $PD = p$, ſarà dunque la $PQ = \sqrt{pp + \overline{\frac{rr + bx}{rr}}^2}$; ma l'elemento del cerchio Ff ſi ſa eſſere $- \frac{rdx}{\sqrt{rr - xx}}$; adunque $\frac{Ff \times PQ}{2}$, elemento della ſuperficie, ſarà $= - \frac{rdx \sqrt{pp + \overline{\frac{rr + bx}{rr}}^2}}{2\sqrt{rr - xx}}$, formola che fin' ora non ſi ſa ridurre alle note quadrature di circolo, o dell'iperbola, perchè non ſi può liberare da' ſegni radicali, come ſi è veduto al num. 38., e come ci è pure occorſo nel volere rettificare l'elliſſi.

Ricorrendo alla ſerie: ſi riduca in ſerie infinita il numeratore, e lo ſteſſo ſi faccia del denominatore, indi ſi proceda nello ſteſſo modo, come ſi è fatto nella ſeconda maniera intorno all' elliſſi nell' Eſempio 20. num. 112.

ESEMPIO XL.

134. Sia l'emisfero, il di cui ſemicircolo generatore CDK, (*Fig.* 32.) che s'aggiri attorno al raggio DB, e ſia $DB = a$, una qualunque $DA = x$, ſarà

rà $AE = y = \sqrt{2ax - xx}$, e però $dy^2 = \frac{\overline{a - x}^2 \times dx^2}{2ax - xx}$,

e fatte le sostituzioni nella formola generale, sarà essa $= \frac{cadx}{r}$, ed integrando $\frac{cax}{r} =$ alla superficie del segmento di sfera generato dall'arco EDM; e fatta $x = a$, sarà $\frac{caa}{r}$ la superficie dell'emisfero, e però $\frac{2caa}{r}$ la superficie di tutta la sfera. Sarà adunque la superficie d'un qualunque segmento eguale al prodotto della periferìa del circolo generatore della sfera nell'altezza di esso segmento; dell'emisfero, eguale al rettangolo della stessa periferìa nel raggio; e della sfera, eguale al rettangolo della periferìa nel diametro, e però esse superficie tra loro nella ragione, che ânno l'altezza, il raggio, ed il diametro.

E perchè l'area del circolo generatore della sfera è $\frac{caa}{2r}$, sarà la superficie della sfera ad essa area :: 4, 1, cioè quadrupla del massimo circolo.

Ma poichè è pure la superficie del cilindro (non comprese le basi) circoscritto all'emisfero, eguale al prodotto della periferìa della base nell'altezza, sarà dunque $= \frac{caa}{r}$, ed in conseguenza essa superficie eguale alla superficie dell'emisfero. Ma il cono inscritto nell'

emis-

emisfero â pure la ſuperficie $= \frac{ca\sqrt{2aa}}{2r}$, dunque ſarà la ſuperficie del cilindro, o dell'emisfero alla ſuperficie del cono inſcritto, come $2a$, $\sqrt{2aa}$, cioè a dire, come il diametro al lato del cono ec.

ESEMPIO XLI.

135. Si muova la parabola ACO dell'equazione $ax = yy$ attorno all'aſſe AM (*Fig.* 33.). Sarà dunque $adx = 2ydy$, e $dx^2 = \frac{4yydy^2}{aa}$; e però la formola, fatta la ſoſtituzione, $\frac{cydy}{ar}\sqrt{4yy + aa}$, ed integrando, $\frac{c}{12ra} \times \overline{4yy + aa}^{\frac{3}{2}} =$ alla ſuperficie del conoide parabolico indefinito, eguale alla quarta proporzionale di $6a$, $\sqrt{4yy + aa}$, e dell' area del circolo del raggio $= \sqrt{4yy + aa}$.

136. Sia più generalmente $\frac{x^t}{t} = y$ l'equazione della parabola ACO (*Fig.* 33.) con l'aſſiſſa $AB = x$, e coll'applicata $BC = y$, la qual'equazione per lo trilineo

ACD sarà $x^{\frac{1}{t}} = y$, se si prenda $AD = x$ siccome assissa, e $DC = y$ siccome ordinata. Al num. 119. Esempio 27. si è veduto, essere l'elemento della curva, il quale chiamo $du = \dfrac{dx}{\overline{x^{2t-2}+1}^{-\frac{1}{2}}}$, e la formola differenziale per le superficie è $\frac{cydu}{r}$, dunque sarà $\frac{cydu}{r} = \dfrac{cydx}{r \times \overline{x^{2t-2}+1}^{-\frac{1}{2}}}$; ma è, per l'equazione locale, $\frac{x^t}{t} = y$, dunque sarà $\frac{cydu}{r} = \dfrac{cx^t dx}{rt \times \overline{x^{2t-2}+1}^{-\frac{1}{2}}}$.

Per procedere alle integrazioni, o quadrature mi servirò del metodo spiegato al num. 61., e posto in uso nel suddetto Esempio 27., ma prima si osservi, che essendo c la periferìa del circolo, il di cui raggio r, l'integrale $\int \frac{cydu}{r}$ ci dà la superficie del conoide; ma se c sarà una qualunque data retta, si averà la misura della superficie dell'ugna, quando cioè eretta sulla base CAB una cilindroide, questa viene tagliata da un piano, che passa per l'asse AB, e forma con la base sottoposta CAB un'angolo, il di cui seno retto a quello del complemento sia, come la c alla r. Le superficie

cie ungulari adunque ſtanno a quelle del ſolido rotondo, come una data retta alla circonferenza c.

Operando adunque, come nel citato num. 61. è ſtato ſpiegato, affinchè la noſtra formola ſia algebraicamente integrabile, o riducibile alle note quadrature, troveremo dover eſſere $t = \frac{3 + 2h}{1 + 2h}$, o pure $t = \frac{h + 1}{h + 2}$, intendendo per h un qualunque numero intiero poſitivo, o negativo.

La prima condizione, cioè $t = \frac{3 + 2h}{1 + 2h}$, poſto h numero intiero prima poſitivo, e poi negativo, ci dà le due progreſſioni

$$\text{I.} \quad t = \frac{3}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{11}{9} \text{ ec.}$$

$$\text{II.} \quad t = \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11} \text{ ec.}$$

La ſeconda condizione, cioè $t = \frac{h + 1}{h + 2}$, poſto h numero intiero prima poſitivo, poi negativo, ci dà le due altre progreſſioni

$$\text{III.} \quad t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \text{ ec.}$$

$$\text{IV.} \quad t = \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5} \text{ ec.}$$

Soggiungo alcune brevi osservazioni.

I. Siccome le due progressioni prima, e terza abbracciano gli esponenti di tutte quelle parabole, che aggirandosi intorno all'asse generano conoidi, la superficie de' quali è analiticamente quadrabile, supposta soltanto la rettificazione della periferìa circolare, e conseguentemente tutte le unghie sopra descritte di data altezza ammettono una quadratura algebraica; così ne' casi della serie seconda, e quarta ci vuole qualche cosa di più, e c'entra il tetragonismo dell'iperbola.

II. E' notabile, che paragonando insieme la serie prima con la seconda, e la terza con la quarta, gli esponenti sono inversi, ed appartengono alla medesima curva. Ciò significa, che potendosi girare l'area parabolica o intorno l'asse AB, o intorno l'asse AD, e producendosi nell'uno, e nell'altro caso superficie affatto diverse, se nel primo si genera una superficie assolutamente quadrabile, almeno considerata nell'unghie; nel secondo tutto all'opposto, essendo reciprochi i valori, nascono le superficie suddette ipoteticamente quadrabili. Per esempio il conoide formato dalla prima parabola cubica arruotata intorno AD ci somministra quadrabile algebraicamente la superficie dell'ugne, ed anche quella del solido rotondo, mentre si abbia una linea retta eguale alla circonferenza. Ma se s'aggiri intorno all'asse AB, si richieggono le quadrature. Nella para-

parabola seconda cubica succede lo stesso; e tutto all' opposto nella apolloniana.

III. Confrontando queste serie con quelle del num. 119. si scorge, che fra queste nessuna parabola della prima, o seconda serie è rettificabile nè analiticamente, nè per via delle note quadrature; quelle all' opposto della seconda, e quarta sono tutte rettificabili, ed abbracciano tutte le contenute nelle progressioni comprese nel citato num. 119.

IV. Fra le iperbole la sola comune tra gli asintoti ammette la superficie riducibile alla quadratura della stessa iperbola, perchè altro esponente negativo non ci si affaccia nelle citate progressioni, salvo che -1.

V. Gli esponenti, che non si trovano nelle dette serie, come $t = 4, 5, 6$ ec. $\frac{2}{5}, \frac{5}{7}$ ec. vogliono quadrature più alte per misurare le superficie conoidali indi nascenti.

ESEMPIO XLII.

137. Sia l'ellissi ADC, (*Fig.* 28.) che si muova attorno all'asse AC, e sia $AB = a$, $BD = b$, $AE = x$, $EO = y$, e l'equazione $\frac{aayy}{bb} = 2ax - xx$.

Sarà

Sarà dunque, differenziando, $dx = \frac{aaydy}{bb \times \overline{a-x}}$, e però $dx^2 = \frac{a^4yydy^2}{b^4 \times \overline{a-x}^2}$, e ponendo in luogo di $-2ax + xx$ il valore $-\frac{aayy}{bb}$ dato dall' equazione, sarà $dx^2 = \frac{aayydy^2}{bb \times \overline{bb-yy}}$. Adunque sostituito questo valore nella formola generale, la troveremo essere

$\frac{cydy \sqrt{b^4 + aayy - bbyy}}{rb \sqrt{bb-yy}}$, e fatta per brevità $aa - bb = ff$, supposta a maggiore di b, cioè che l'asse, attorno cui s'aggira l'ellissi, sia il maggiore, (se fosse a minore di b si farebbe $aa - bb = -ff$) sarà $\frac{cydy \sqrt{b^4 + ffyy}}{rb \sqrt{bb-yy}}$ formola, che per le cose dette a suo luogo si potrà liberare dai radicali, ed il di cui integrale per mezzo del canone del num. 56. troveremo dipendere dalla quadratura del circolo. Ma se sarà a minore di b, cioè l'asse, attorno cui s'aggira l'ellissi, il minore, la superficie dello sferoide dipenderà d'ambe le quadrature, cioè dalla circolare, e dall'iperbolica. La superficie poi dell'ugna nel primo caso è eguale ad una porzione di spazio ellittico, che si determina facilmente per via delle

delle normali alla curva ; ma nel secondo caso appunto queste normali ci danno uno spazio iperbolico eguale alla stessa superficie dell'ugna . Per vedere ciò chiaramente; sia la curva ACF, (*Fig.* 40.) su cui s'intenda eretta una cilindroide, che venga tagliata da un piano, il quale passi per l'asse AB, e formi col sottoposto piano CAB un'angolo semiretto, egli è manifesto, che chiamato du l'elemento della curva, sarà $\int ydu$ la superficie dell'ugna inferiore, e $\int \frac{cydu}{r}$ la superficie del conoide nascente dal girarsi la figura CAB intorno l'asse AB, e però sarà la superficie dell'ugna a quella del conoide, come il raggio alla circonferenza del circolo.

Ora sieno le due ordinate BC, DF infinitamente prossime, e condotta al punto F la normale FG, si metta essa in DH, e faccia figura di applicata della nuova curva MIH delineata col metodo prescritto: dico, che l'area $MABI$ è eguale alla superficie dell'ugna, che â per base l'arco AC.

I due triangoli FCE, GFD sono simili, dunque sarà FC, $CE :: GF$, FD, e però $FD \times FC = GF \times CE = DH \times DB$. Ma $FD \times FC$ (ydu) è l'elemento della superficie dell'ugna; ed $HD \times DB$ è l'elemento dell'area $IMAB$, dunque essendo eguali questi elementi, lo saranno ancora i loro integrali, cioè

cioè le predette aree. Ciò premesso, sia la Figura ACB un quarto d'ellissi dell'equazione $\frac{aayy}{bb} = 2ax - xx$, sarà la normale $FG = \frac{b}{aa}\sqrt{2a^3x - aaxx + bbxx - 2abbx + aabb}$, dunque chiamata z l'ordinata BI, sarà $z = \frac{b}{aa}\sqrt{\overline{xx - 2ax} \times \overline{bb - aa} + aabb}$, equazione alla curva MIH, che appunto è un'altra ellissi quando sia a maggiore di b, cioè se AB sia l'asse maggiore dell'ellissi ACB; ed all'incontro un' iperbola quando sia a minore di b, cioè AB l'asse minore.

Finalmente nel caso di mezzo, cioè quando l'ellissi degenera in circolo, già si sa, che la detta superficie dell' ugna è quadrabile, eguagliandosi ad un rettangolo.

ESEMPIO XLIII.

138. Sia l'iperbola BD, (*Fig.* 29.) che s'aggiri attorno all'asse trasverso BA. Sia A il centro, $BA = a$, AE semiasse conjugato $= b$, $AC = x$, $CD = y$; sarà l'equazione $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, e però $y = \frac{b}{a}\sqrt{xx - aa}$, $dy = \frac{bxdx}{a\sqrt{xx - aa}}$, adunque la formola generale, fatte

le

le sostituzioni, sarà

$$\frac{cb}{ar}\sqrt{xx-aa}\,\sqrt{\frac{aaxxdx^2+bbxxdx^2-a^4dx^2}{aa\times xx-aa}},\ \text{cioè}$$

$$\frac{cbdx}{aar}\sqrt{aaxx+bbxx-a^4},\ \text{o sia, fatta}\ aa+bb=ff,$$

$\frac{cbfdx}{aar}\sqrt{xx-\frac{a^4}{ff}}$, il di cui integrale, quando si sia liberata dal segno radicale, troveremo dipendere medesimamente dalla quadratura dell'iperbola.

ESEMPIO XLIV.

139. Sia l'iperbola MD, (*Fig.* 41.) equilatera fra gl'asintoti, e si muova attorno all'asintoto AC, di cui l'equazione sia $ay+xy=aa$, essendo $AB=a$, $BC=x$, $CD=y$. Sarà dunque $x=\frac{aa}{y}-a$, e $dx^2=\frac{a^4dy^2}{y^4}$; e però la formola generale sarà, fatta la sostituzione, $\frac{cdy}{ry}\sqrt{y^4+a^4}$. Si faccia $\sqrt{y^4+a^4}=z$, e però $y^4=zz-a^4$, $dy=\frac{zdz}{2y^3}$. Fatte queste sostituzioni, avremo trasformata la formola in quest'altra $\frac{czzdz}{2r\times zz-a^4}$

 libera

libera da' segni radicali, il di cui integrale dipende in parte da' logaritmi, come è facile a vedere. Adunque la ricercata superficie della nostra iperbola descritta dipenderà dalla quadratura pure dell'iperbola.

ESEMPIO XLV.

140. Sia il solido generato dalla trattoria (*Fig.* 20.) *ABF*, come nel Esempio 36. num. 128., di cui si voglia la superficie. Nella formola generale $\frac{cydu}{r}$ (intendendo per *du* l'elemento della curva) sostituito in luogo di *du* il valore $-\frac{ady}{y}$ dato dall'equazione della curva, avremo $-\frac{acdy}{r}$, ed integrando $-\frac{acy}{r}+n$. Ma quando la superficie sia nulla, si â $y=a$; dunque la costante $n=\frac{aac}{r}$, e però l'integrale compito $\frac{aac}{r}-\frac{acy}{r}$ eguale alla superficie del solido generato dalla figura *AEDB*; e fatta $y=0$, sarà $\frac{aac}{r}$ eguale alla superficie del solido infinitamente prodotto. Ma l'area del circolo, il di cui raggio $=\sqrt{2aa}$, si trova $=\frac{caa}{r}$, dunque la superficie del solido infinitamente prodotto è eguale

all'

all'area del circolo, il di cui raggio sia la diagonale del quadrato di AE.

ESEMPIO XLVI.

141. Sia l'unghia $CNEODAC$, (*Fig.* 37.) di cui si cerchi la superficie. Denominando, come al num. 129, sarà $QK = \frac{bx}{a} = MN$, ma Mi elemento della curva $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$, adunque sarà $\frac{bx}{a} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ eguale al quadrilineo infinitesimo $MimN$, elemento della superficie della metà dell'unghia.

Sia la curva DAC un semicircolo, sarà in questo caso $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$, e però la formola $\frac{bxdx}{\sqrt{aa - xx}}$, ed integrando (per lo num. 31.) sarà $-b\sqrt{aa - xx} + f$, ma fatta $x = 0$, sarà $f = ab$, adunque l'integrale compito si trova essere $ab - b\sqrt{aa - xx}$, e posta $x = a$, rispetto a tutta la superficie della metà dell'unghia, sarà essa superficie $= ab$.

Sia la curva DAC la parabola dell' equazione $yy = a - x$, sarà $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{2} dx \sqrt{\frac{4a - 4x + 1}{a - x}}$, e però la formola $\frac{bxdx}{2a} \sqrt{\frac{4a - 4x + 1}{a - x}}$, il di cui integrale dipende dalla quadratura dell' iperbola, adunque dalla stessa quadratura dipenderà la superficie dell' unghia.

ESEMPIO XLVII.

142. Sia il conoide parabolico generato dalla rotazione della parabola ADH con le coordinate in angolo obbliquo (*Fig.* 7.) attorno all' asse AC, la di cui equazione è $ax = yy$. Si sostituisca nella formola delle superficie, che a questo caso compete, cioè nella formola $\frac{cay}{rm} \sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$ il valore di dx dato per dy dall' equazione differenziata della curva, e si trasformerà in quest' altra $\frac{2cnydy}{arm} \sqrt{yy + \frac{aey}{m} + \frac{aa}{4}}$, il di cui integrale si trova essere in parte algebraico, ed in parte logaritmico.

143. Coerentemente al metodo esposto delle quadrature, rettificazioni ec. sarebbe questo luogo opportuno

tuno per dare altresì le formole de' centri di gravità, di oscillazione, e di percussione, ma stimo meglio di ommetterle, includendo esse necessariamente alcuni principj di Statica, dei quali non suppongo informati i miei Leggitori.

CAPO

C A P O I V.

Del Calcolo delle Quantità Logaritmiche, ed Esponenziali.

144. QUantità esponenziali (giacchè altrove abbastanza è stato detto, cosa sieno le logaritmiche) si chiamano quelle, che sono elevate a qualunque potestà indeterminata; tali sarebbero a^x, y^z ec., gli esponenti delle quali x, z sono quantità indeterminate, e però il calcolo, che versa sopra queste tali quantità, chiamasi calcolo esponenziale.

145. Ma di più gradi sono le quantità esponenziali; si dicono del primo grado quelle, i di cui esponenti sono indeterminate ordinarie, come sono appunto le quantità a^x, y^z. Del secondo grado sono quelle, gli esponenti delle quali sono essi pure quantità esponenziali, come sarebbe a^{x^t}, y^{z^p}, intendendo la x elevata alla potestà t, e la z alla potestà p. Del terzo grado sono quelle, che ânno per esponente una quantità esponenziale del secondo grado, e così di mano in mano coll' istesso ordine.

146. Ma qui fa d'uopo richiamare a memoria ciò,

ciò, che è ſtato detto al num. 11., cioè, che $\int \frac{ady}{y} = ly$ nella logaritmica della ſottangente $= a$; adunque il differenziale di ly ſarà $\frac{dy}{y}$ moltiplicato nella ſottangente della logaritmica, in cui ſi prende il logaritmo; così il differenziale di $l\sqrt{aa - xx}$ nella logaritmica della ſottangente $= 1$ ſarà $-\frac{xdx}{aa - xx}$, e generalmente il differenziale d'una qualunque quantità logaritmica ſarà una formola compoſta del differenziale della quantità moltiplicata nella ſottangente, e diviſa per la quantità ſteſſa.

147. Ciò poſto: abbiaſi da differenziare la quantità logaritmica $l^m x$ (la m è eſponente del logaritmo). Si ponga $l^m x = y^m$, adunque ſarà $l x = y$, e $\frac{dx}{x} = dy$; ma il differenziale di $l^m x$ ſarà $my^{m-1}dy$, ed è $y^{m-1} = l^{m-1}x$; adunque ſoſtituito il valore in luogo di y, e dy dato per x, ſarà il differenziale di $l^m x = m\, l^{m-1} x \times \frac{adx}{x}$, ſuppoſta $= a$ la ſottangente della logaritmica; o pure $m\, l^{m-1} x \times \frac{dx}{x}$, ſuppoſta eſſa ſottangente $= 1$.

148. Che ſe foſſe da differenziarſi $l^m x^n$; fatta

ta $x^n = z$, sarà $l^m z$, ed il differenziale sarà $ml^{m-1}z \times \frac{dz}{z}$; ma $dz = nx^{n-1}dx$, adunque sostituendo, il differenziale della proposta formola $l^m x^n$ sarà $nml^{m-1}x^n \times \frac{dx}{x}$.

149. Abbiasi da differenziare la formola llx. Si ponga $lx = y$, e però $llx = ly$; adunque sarà $\frac{dx}{x} = dy$ nella logaritmica della sottangente $= 1$ (il che s'intenda ogni qual volta esse sottangenti non siano espresse); ma poichè $llx = ly$, il differenziale di llx sarà $\frac{dy}{y}$, adunque posti in luogo di y, e di dy i valori dati per x, sarà $\frac{dx}{xlx}$ il differenziale della proposta formola.

Ma più generalmente sia $l^m lx$ da differenziarsi. Pongo $lx = y$, e però $l^m lx = l^m y$, e $\frac{dx}{x} = dy$; ma il differenziale di $l^m y$ è $ml^{m-1}y \times \frac{dy}{y}$; adunque sostituiti i valori in luogo di y, e di dy dati per x, sarà $ml^{m-1}lx \times \frac{dx}{xlx}$ il differenziale cercato.

Più generalmente ancora. Sia da differenziarsi $l^n l^m x$. Pongo $l^m x = y^m$, e però $lx = y$, e $\frac{dx}{x} = dy$;

adun-

adunque farà $l^n l^m x = l^n y^m$. Ma il differenziale di $l^n y^m$ è $mnl^{n-1} y^m \times \frac{dy}{y}$, adunque fatte le foftituzioni, farà $mnl^{n-1} l^m x \times \frac{dx}{x\,l\,x}$ il differenziale cercato.

150. Quanto al modo di differenziare le quantità efponenziali. Sia la quantità z^x da differenziarfi. Pongo $z^x = t$, farà in confeguenza $lz^x = lt$, ma per lo num. 14. $lz^x = xlz$; adunque farà $xlz = lt$, e però differenziando $dxlz + \frac{xdz}{z} = \frac{dt}{t}$, ma $t = z^x$, onde $dxlz + \frac{xdz}{z} = \frac{dt}{z^x}$, e finalmente $dt = z^x dxlz + xz^{x-1} dz$, differenziale cercato.

151. Sia da differenziarfi la quantità efponenziale del fecondo grado z^{x^p}. Pongo $z^{x^p} = t$, adunque farà $x^p lz = lt$, e differenziando, il differenziale di $x^p \times lz + x^p \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t}$, ma per lo num. antecedente, il differenziale di x^p fapiamo effere $x^p dplx + px^{p-1} dx$, adunque farà $\overline{x^p dp\,lx + px^{p-1} dx} \times lz + x^p \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t}$, ma $t = z^{x^p}$, adunque farà $dt = z^{x^p} x^p dplxlz + z^{x^p} px^{p-1} dxlz + z^{x^p} z^{-1} x^p dz$, differenziale cercato.

Nello fteffo modo fi proceda intorno alle quantità efponenziali di qualunque altro grado.

152. Isteſſamente ſi averanno i differenziali delle quantità, che ſono il prodotto di quantità eſponenziali, per eſempio di $x^p y^u$, imperocchè il differenziale di queſta ſarà il prodotto di x^p nel differenziale di y^u, con di più il differenziale di x^p in y^u; ma i differenziali di x^p, ed y^u ſi ſanno trovare, adunque ec.

153. Dall'ordine, con cui procedono i differenziali logaritmici, ſi poſſono cavare alcune regole per la integrazione delle formole differenziali logaritmiche; ed in primo luogo que' canoni, che ſervono per la integrazione delle quantità differenziali ordinarie, ſerviranno ancora per le quantità differenziali logaritmiche a loro ſimili, purchè queſte ſieno in oltre diviſe per la variabile, e l'integrale di queſte ſarà lo ſteſſo dell'integrale di quelle, ponendo ſolo in queſte in luogo della incognita, o ſua poteſtà, il logaritmo, o poteſtà del logaritmo dell'incognita ſteſſa, ed il tutto dividendo per la ſottangente della logaritmica.

Così poichè l'integrale di $mx^{m-1}dx$ è x^m, ſarà pure $\frac{l^m x}{a}$ l'integrale di $ml^{m-1}x \times \frac{dx}{x}$.

Isteſſamente poichè $\int x^{-1}dx = lx$, ſarà pure $\int l^{-1}x \times \frac{dx}{x}$, o ſia $\int \frac{dx}{x\,lx} = llx$, ſuppoſta la ſottangente $= 1$.

E poichè $\int ydy \sqrt{aa+yy} = \frac{\overline{aa+yy}^{\frac{3}{2}}}{3}$, farà pure $\int ly \sqrt{aa+l^2y} \times \frac{dy}{y} = \frac{\overline{aa+l^2y}^{\frac{3}{2}}}{3}$.

Sia da integrarfi $ml^{m-1}lx \times \frac{dx}{xlx}$. Pongo $lx = y$; adunque $\frac{dx}{x} = dy$, e fatta la foſtituzione, farà $ml^{m-1}y \times \frac{dy}{y}$; ma l'integrale di $my^{m-1}dy$ ſi fa eſſere y^m, adunque l'integrale di $ml^{m-1}y \times \frac{dy}{y}$ farà $l^m y$; ma $y = lx$, e però $ly = llx$, e $l^m y = l^m lx$; adunque $\int ml^{m-1}lx \times \frac{dx}{xlx} = l^m lx$.

Sia $nml^{n-1}x^m \times \frac{dx}{x}$. Pongo $x^m = y$, e però $dx = \frac{dy}{mx^{m-1}}$; fatte le foſtituzioni, farà $nml^{n-1}y \times \frac{dy}{mx^{m-1} \times x}$, cioè $\frac{nml^{n-1}y}{m} \times \frac{dy}{y}$, o ſia $nl^{n-1}y \times \frac{dy}{y}$, il di cui integrale è $l^n y$, adunque reſtituito il valore di y, farà $\int nml^{n-1}x^m \times \frac{dx}{x} = l^n x^m$.

Sia $nml^{n-1}l^m x \times \frac{dx}{xlx}$. Pongo $lx = y$, dun-

que $\frac{dx}{x} = dy$, e $l^m x = y^m$; fatta la sostituzione, sarà $nml^{n-1}y^m \times \frac{dy}{y}$, ma l'integrale di questa è $l^n y^m$, adunque restituito il valore, sarà

$$\int nml^{n-1}l^m x \times \frac{dx}{xlx} = l^n l^m x.$$

154. A ciò aggiungo una regola generale per la integrazione della formola $y^m l^n y dy$, e dico, che sarà generalmente $\int y^m l^n y dy = \frac{y^{m+1}l^n y}{m+1} - \frac{ny^{m+1}al^{n-1}y}{\overline{m+1}^2} + \frac{n \times \overline{n-1} \times y^{m+1}aal^{n-2}y}{\overline{m+1}^3} - \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times y^{m+1}a^3 l^{n-3}y}{\overline{m+1}^4}$ ec., e così continovando in infinito con la stessa legge, che da se è manifesta.

Quindi se l'esponente n sarà un numero intiero, e positivo, è facile il vedere, che la serie s'interromperà, ed in conseguenza sarà dato in termini finiti l'integrale della proposta formola.

Sia per cagione d'esempio $n = 2$; sarà dunque $n - 2 = 0$, e però sarà zero il coefficiente del quarto termine, e de' susseguenti, per essere ciascuno moltiplicato

plicato per $n-2$. Così se sarà $n=3$, s' interromperà la serie nel quinto termine; e così degl' altri ec.

Sia $n=2$, $m=1$, onde la formola d' integrarsi sia yl^2ydy; sarà adunque zero il quarto termine, ed ognuno de' susseguenti, e però l' integrale sarà $\frac{yyl^2y}{2} - \frac{2yyaly}{4} + \frac{2yyaa}{8}$, cioè $\frac{2yyl^2y - 2ayyly + aayy}{4}$.

Che se fosse $m=-1$, sarebbe inutile la serie, perchè sarebbe $m+1=0$, il che rende infinito ciascun termine, ma in questo caso non v' è bisogno della serie, giacchè si fanno integrare queste formole per le cose dette di sopra.

Rimane, che di tale regola se ne dia la dimostrazione; per lo che fare si ponga $ly=z$, e però $\frac{ady}{y}=dz$; sarà adunque, fatta la sostituzione, $y^m l^n y dy = y^m z^n dy$; ma $y^m z^n dy = y^m z^n dy + \frac{n}{m+1} y^{m+1} z^{n-1} dz -$
$\frac{n}{m+1} y^m z^{n-1} ady - \frac{n \times \overline{n-1}}{\overline{m+1}^2} \times y^{m+1} z^{n-2} adz +$
$\frac{n \times \overline{n-1}}{\overline{m+1}^2} \times y^m z^{n-2} aady$ ec., e così in infinito, perchè in questa guisa ciascun termine, toltone il primo, si distrugge dall' immediatamente susseguente, appunto

per

per essere $dz = \frac{ady}{y}$. Ora poichè questa tal serie infinita è integrabile, prendendo i termini a due a due, imperciocchè l'integrale del primo, e secondo termine è $\frac{y^{m+1}z^n}{m+1}$; del terzo, e quarto è $-\frac{any^{m+1}z^{n-1}}{\overline{m+1}^2}$; del quinto, e sesto è $\frac{aan \times \overline{n-1} \times y^{m+1}z^{n-2}}{\overline{m+1}^3}$, e così di mano in mano; restituito in questi integrali ly in luogo di z, troveremo finalmente essere

$$\int y^m l^n y dy = \frac{y^{m+1}l^n y}{m+1} - \frac{any^{m+1}l^{n-1}y}{\overline{m+1}^2} +$$

$$\frac{aan \times \overline{n-1} \times y^{m+1}l^{n-2}y}{\overline{m+1}^3} - \frac{a^3 n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}\, y^{m+1}l^{n-3}y}{\overline{m+1}^4}$$

155. L'artifizio, con cui si ritrova la suddetta serie, può essere il seguente.

M'immagino, che l'integrale di $y^m l^n y dy$ sia $\frac{y^{m+1}l^n y}{m+1}$, quale appunto sarebbe, se $l^n y$ non fosse quantità variabile, ma posta la sottangente $= a$, il differenziale di esso integrale è $y^m l^n y dy + \frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$, il quale si trova maggiore della proposta formola, quanto

to è $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$; adunque l'integrale aſſunto è maggiore del dovere, quanto è l'integrale di $\frac{nyal^{n-1}ydy}{m+1}$, e però l'integrale di queſto ſi dovrà ſottrarre dall'integrale ſuppoſto.

E qui di nuovo m'immagino, che l'integrale di $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$ ſia $\frac{ny^{m+1} a l^{n-1} y}{\overline{m+1}^2}$, onde l'integrale della propoſta formola venga ad eſſere $\frac{y^{m+1} l^n y}{m+1} - \frac{ny^{m+1} a l^{n-1} y}{\overline{m+1}^2}$. Ma differenziando $\frac{ny^{m+1} a l^{n-1} y}{\overline{m+1}^2}$, ſi â $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1} + \frac{n \times \overline{n-1} \times y^m a^2 l^{n-2} y dy}{\overline{m+1}^2}$; adunque l'integrale di $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$ non è $\frac{ny^m a l^{n-1} y}{\overline{m+1}^2}$, ma è maggiore del dovere, quanto è l'integrale di $\frac{n \times \overline{n-1} \times y^m aa l^{n-2} y dy}{\overline{m+1}^2}$, adunque ſi è ſottratto troppo, e però biſognerà aggiungere queſto integrale, il quale nuovamente m'imma-

magino, che sia $\dfrac{n \times \overline{n-1} \times y^{m+1} aa\, l^{n-2} y}{\overline{m+1}^{\,3}}$, adunque sarebbe l'integrale della proposta formola

$$\frac{y^{m+1} l^n y}{m+1} - \frac{n y^{m+1} a\, l^{n-1} y}{\overline{m+1}^{\,2}} + \frac{n \times \overline{n-1} \times y^{m+1} aa\, l^{n-2} y}{\overline{m+1}^{\,3}} \text{ ec.,}$$

e così con lo stesso ordine procedendo si continoverà la serie in infinito.

156. Si possono anco avere gl'integrali delle formole differenziali logaritmiche per via di serie, che non contengano quantità logaritmiche, ma sole ordinarie, le quali serie però non s'interrompono mai, e sono sempre infinite.

Sia adunque da integrarsi $x\, lx \times dx$. Pongo $x = z + a$, sostituendo sarà $\overline{z+a}\, l\, \overline{z+a} \times dx$, ma per lo num. 70. $l\, \overline{z+a} = \dfrac{z}{a} - \dfrac{zz}{2aa} + \dfrac{z^3}{3a^3} - \dfrac{z^4}{4a^4}$ ec., supposta la sottangente $= 1$, facendo adunque l'attuale moltiplica, averemo $\overline{z+a}\, l\, \overline{z+a} \times dz =$

$$zdz + \frac{zzdz}{a} - \frac{z^3 dz}{2aa} + \frac{z^4 dz}{3a^3} - \frac{z^5 dz}{4a^4} \text{ ec.}$$

$$- \frac{zzdz}{2a} + \frac{z^3 dz}{3aa} - \frac{z^4 dz}{4a^3} + \frac{z^5 dz}{5a^4},$$

cioè

cioè $zdz + \frac{zzdz}{2a} - \frac{z^3dz}{6aa} + \frac{z^4dz}{12a^3} - \frac{z^5dz}{20a^4}$ ec., ed integrando sarà $\frac{zz}{2} + \frac{z^3}{6a} - \frac{z^4}{24aa} + \frac{z^5}{60a^3} - \frac{z^6}{120a^4}$ ec. $=$ $\int \overline{z+a}\, l\, \overline{z+a} \times dz$.

Che se la formola fosse $x^m lxdx$, cioè $\overline{z+a}^m\, l\, \overline{z+a} \times dz$, si dovrebbe moltiplicare la serie esprimente il logaritmo nella potestà $\overline{z+a}^m$. E se di più fosse anco il logaritmo elevato a potestà, come a dire $x^m l^n xdx$, cioè $\overline{z+a}^m\, l^n \overline{z+a} \times dz$, bisognerebbe in oltre elevare alla potestà n la serie infinita, che esprime esso logaritmo, e fare il rimanente come sopra.

157. Le equazioni o formole differenziali affette da quantità logaritmiche bene spesso ammettono integrazioni, che sono geometriche, e dipendono da quadrature di spazj curvilinei, che facilmente si descrivono, supposta la logistica. Eccone alcuni esempj scelti fra i più semplici.

Sia l'equazione $dy\, ly = dx$, e nella logaritmica descritta (*Fig.* 42.) pongasi $CD = y$, e presa la sottangente per unità, avremo AC, o $HD = ly$; onde il rettangolo infinitesimo DG, la di cui base $GH = FE = dy$, sarà $= dy\, ly$, ma questo rettangolo si è l'elemento

dell'area crescente BDH, dunque la somma $\int dy\, l\, y$ è eguale alla detta area BDH.

Di fatto l'area stessa si eguaglia al rettangolo AD meno lo spazio logaritmico $ABDC$; ma questo spazio, siccome è noto, si misura dal rettangolo $AB \times CD = y$, dunque l'area $BDH = \int dy\, l\, y = y\, l\, y - y$, siccome pure può trovarsi per via d'analisi.

Considero un'altra formola $dy\, l^2\, y = dx$. Il primo membro altro non è, che il solido generato dalla flussione HG moltiplicata nel quadrato dell'ordinata GF, il qual solido è analogo all'elemento del conoide generato dall'area BDH girata attorno l'asse BG, dunque l'integrale $\int dy\, l^2\, y = y\, l^2\, y - 2y\, l\, y + 2y$ sta al detto conoide in data ragione.

Più generalmente abbiasi $dy\, l^m y$. Alzata l'applicata HD alla potestà m (essendo l'indice m un numero affermativo, o negativo, intiero, o rotto) basterà, che l'ordinata HM facciasi eguale alla dignità $\overline{HD}^m$, e che per lo punto M, ed altri infiniti in simil maniera determinati passi la curva BMN, per conseguire, che l'area $BMH = \int MH \times dy$ sia eguale, o analoga all'integrale $\int dy\, l^m y$.

Mag-

Maggiore difficoltà non ſi incontra quando anche nella eſpreſſione ci ſi parano avanti i logaritmi dei logaritmi. Propongaſi $dy\,lly = dx$; giacchè AC è il logaritmo di CD, ſe ſi adatterà nella logiſtica la nuova applicata IL eguale all'aſſiſſa AC, ſarà AI il logaritmo di IL, e conſeguentemente il logaritmo del logaritmo della CD. Si proroghi la retta IL ſin a tanto, che tagli la HD parallela, ed eguale ad AC nel punto K, per cui, ed altri infiniti ſimilmente determinati paſſi una nuova curva delineata relativamente alla logiſtica: dico, che la quadratura dello ſpazio ſpettante ad eſſa curva ci dà l'integrale della formola $dy\,lly = dx$.

In altro modo: piglio la differenza della quantità $y\,lly$, cioè $dy\,lly + \frac{dy}{ly}$, ed aggiunto nella noſtra eſpreſſione da ambo le parti il termine $\frac{dy}{ly}$, ſi â $dy\,lly + \frac{dy}{ly} = dx + \frac{dy}{ly}$, ed integrando, $y\,lly = x + \int\frac{dy}{ly}$. Poſta dunque all'aſſiſſa AH l'ordinata corriſpondente in ragion reciproca di $HD = ly$, naſcerà una curva, il di cui tetragoniſmo eſprimerà l'integrale $\int\frac{dy}{ly}$. E ciò baſterà, onde ſi vegga l'andamento del metodo.

158. Paſſerò ora alle integrazioni delle formole

differenziali, che contengono quantità esponenziali, e sia da integrarsi $x^x dx$. Pongo $x = 1 + y$, (prendo l'unità per una qualunque costante) sarà dunque $x^x dx = \overline{1+y}^{1+y} dy$; ciò Posto, faccio in oltre $\overline{1+y}^{1+y} = 1 + u$, adunque sarà $\overline{1+y}\, l\, \overline{1+y} = l\, \overline{1+u}$, e però convertiti in serie pel num. 70. i due logaritmi, e fatta l'attual moltiplica per $1+y$ della prima serie, averassi $y + \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20}$ ec. $=$ $u - \frac{uu}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5}$ ec. Indi faccio una equazione fittizia, e suppongo, che sia

$$u = y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5 \text{ ec.},$$

(A, B, C, D ec. sono quantità da determinarsi) e però

$$\begin{aligned} uu = yy + 2Ay^3 + AAy^4 &+ 2ABy^5 + BBy^6 \text{ ec.} \\ + 2By^4 &+ 2Cy^5 + Dy^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^3 = y^3 + 3Ay^4 &+ 3AAy^5 \text{ ec.} \\ &+ 3By^5 \end{aligned}$$

$$u^4 = y^4 + 4Ay^5 \text{ ec.}$$

$$u^5 = y^5 \text{ ec.},$$

adun-

adunque sarà $u - \frac{uu}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5}$ ec. $=$

$$
\begin{array}{l}
y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5 \text{ ec.} \\
-\frac{1}{2}yy - Ay^3 - \frac{1}{2}AAy^4 - ABy^5 \text{ ec.} \\
\qquad - By^4 - Cy^5 \text{ ec.} \\
\qquad + \frac{1}{3}y^3 + Ay^4 + AAy^5 \text{ ec.} \\
\qquad\qquad + By^5 \text{ ec.} \\
\qquad - \frac{1}{4}y^4 - Ay^5 \text{ ec.} \\
\qquad\qquad + \frac{1}{5}y^5 \text{ ec.}
\end{array}
$$

Ma poichè $u - \frac{1}{2}uu + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5$ ec. $= y + \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20}$ ec., sarà

$$
\begin{array}{l}
y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5 \text{ ec.} \\
-\frac{1}{2}yy - Ay^3 + \frac{1}{2}AAy^4 - ABy^5 \text{ ec.} \\
\qquad - By^4 - Cy^5 \text{ ec.} = y + \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20} \text{ ec.} \\
\qquad + \frac{1}{3}y^3 + Ay^4 + AAy^5 \text{ ec.} \\
\qquad\qquad + By^5 \text{ ec.} \\
\qquad - \frac{1}{4}y^4 - Ay^5 \text{ ec.} \\
\qquad\qquad + \frac{1}{5}y^5 \text{ ec.}
\end{array}
$$

E riducendo l'equazione al zero, sarà

$$
\begin{array}{l}
y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5 \text{ ec.} \\
-\frac{1}{2}yy - Ay^3 - \frac{1}{2}AAy^4 - ABy^5 \text{ ec.} \\
- By^4 - Cy^5 \text{ ec.} \\
+\frac{1}{3}y^3 + Ay^4 + AAy^5 \text{ ec.} = 0. \\
+ By^5 \text{ ec.} \\
-\frac{1}{4}y^4 - Ay^5 \text{ ec.} \\
+\frac{1}{5}y^5 \text{ ec.} \\
-y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} + \frac{y^5}{20} \text{ ec.}
\end{array}
$$

Quindi dal paragone al zero de' primi, secondi, terzi ec. termini troveremo il valore delle assunte A, B, C ec., che saranno $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = \frac{1}{12}$. Adunque, posti questi valori in luogo delle majuscole, averemo $1 + u = \overline{1+y}^{1+y} = 1 + y + yy + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{12}y^5$ ec., onde

$\overline{1+y}^{1+y}dy = dy + ydy + yydy + \frac{1}{2}y^3dy + \frac{1}{3}y^4dy + \frac{1}{12}y^5dy$ ec.,

ed integrando, sarà finalmente

$$\int \overline{1+y}^{1+y}dy = y + \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{8} + \frac{y^5}{15} + \frac{y^6}{72} \text{ ec.}$$

159. In altra maniera ancora si troverà l'integrale

le della formola $x^x dx$. Pongo $x^x = 1 + y$, adunque $x\,l\,x = l\,\overline{1+y}$; riduco in serie $l\,\overline{1+y}$, e sarà $l\,\overline{1+y} = y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$ ec.

Ciò posto, fingo $y = l\,\overline{1+y} + A\,l^2\,\overline{1+y} + B\,l^3\,\overline{1+y} + C\,l^4\,\overline{1+y}\,D\,l^5\,\overline{1+y}$ ec., (A, B, C, D ec. sono quantità da determinarsi) adunque sarà

$$y = l\,\overline{1+y} + A\,l^2\,\overline{1+y} + B\,l^3\,\overline{1+y} + C\,l^4\,\overline{1+y}\,D\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.}$$

$$yy = l^2\,\overline{1+y} + 2a\,l^3\,\overline{1+y} + AA\,l^4\,\overline{1+y} + 2AB\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.}$$
$$+ 2B\,l^4\,\overline{1+y} + 2C\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.}$$

$$y^3 = l^3\,\overline{1+y} + 3\,A\,l^4\,\overline{1+y} + 3\,AA\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.}$$
$$+ 3\,B\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.}$$

$$y^4 = l^4\,\overline{1+y} + 4\,A\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.}$$

$$y^5 = l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.},$$

e però $y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$ ec., cioè

$$l\,\overline{1+y} = l\,\overline{1+y} + A\,l^2\,\overline{1+y} + B\,l^3\,\overline{1+y} + C\,l^4\,\overline{1+y} + D\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.}$$
$$- \frac{1}{2}\,l^2\,\overline{1+y} - A\,l^3\,\overline{1+y} - \frac{1}{2}\,AA\,l^4\,\overline{1+y} - AB\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.}$$
$$- B\,l^4\,\overline{1+y} - C\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.}$$
$$+ \frac{1}{3}\,l^3\,\overline{1+y} + A\,l^4\,\overline{1+y} + AA\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.}$$
$$+ B\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.}$$
$$- \frac{1}{4}\,l^4\,\overline{1+y} - A\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.}$$
$$+ \frac{1}{5}\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.}$$

Quindi

Quindi riducendo l'equazione al zero, dal paragone al zero de' primi, secondi, terzi ec. termini troveremo il valore delle assunte A, B, C, D, ec., cioè $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{6}$, $C = \frac{1}{24}$, $D = \frac{1}{120}$ ec., onde sarà

$$1+y = 1 + l\overline{1+y} + \tfrac{1}{2}l^2\overline{1+y} + \tfrac{1}{6}l^3\overline{1+y} + \tfrac{1}{24}l^4\overline{1+y} + \tfrac{1}{120}l^5\overline{1+y}$$

ma $l\overline{1+y} = xlx$, ed $1+y = x^x$; adunque fatte le sostituzioni, e moltiplicando per dx, sarà $x^x dx = dx + xdx\,lx + \frac{1}{2}xxdx\,l^2x + \frac{1}{6}x^3dx\,l^3x + \frac{1}{24}x^4dx\,l^4x + \frac{1}{120}x^5dx\,l^5x$ ed integrando con le note regole di sopra spiegate, sarà finalmente $\int x^x dx = x + \frac{xxlx}{2} - \frac{xx}{4} + \frac{x^3l^2x}{6} - \frac{x^3lx}{9} + \frac{x^3}{27} + \frac{x^4l^3x}{24} - \frac{x^4l^2x}{32} + \frac{x^4lx}{64} - \frac{x^4}{256}$ ec.

160. Ma per dire in oltre alcuna cosa intorno alla costruzione delle curve espresse da equazioni logaritmiche, ed esponenziali. Debbasi in primo luogo descrivere la curva dell'equazione $x = \frac{l^{\frac{3}{2}}y}{a^{\frac{1}{2}}}$: sia BD (*Fig.* 43.) la logritmica, in cui si prendano i logaritmi della proposta equazione, la di cui sottangente sia, per esempio, $= a = AB$; ciò posto, presa $y = a = AB$, il logaritmo di y sarà $= 0$, e però $x = 0$; adunque fatta (*Fig.* 44.)

$MN =$

$MN = y = a$, sarà N un punto nella curva. Presa y minore di AB, sarà ly quantità negativa, e però $l^{\frac{3}{2}}y$ quantità immaginaria, per essere il 2 indice pari di radice di quantità negativa, onde x sarà immaginaria ogni qual volta sia y minore di a. Presa y maggiore di AB per esempio $= CD$, sarà $AC = ly$; ma per l'equazione data, è $a^{\frac{1}{2}}, l^{\frac{1}{2}}y :: ly, x$, cioè $a, \sqrt{aly} :: ly, x$; adunque fatta $MP = CD$, se prenderassi PH eguale alla quarta proporzionale di AB, della media tra AB, ed AC, e della stessa AC, sarà essa $= x$, ed il punto H nella curva. In questo modo si troveranno quanti punti si vogliono, e descriverassi la curva, la quale anderà in infinito, come è facile a conoscere.

Per avere la sottangente della data curva, prendo la formola differenziale $\frac{ydx}{dy}$ delle sottangenti; differenzio l'equazione della data curva, e trovo $dx = \frac{3}{2} l^{\frac{3-2}{2}} y \times \frac{a^{\frac{1}{2}} dy}{y}$; fatta la sostituzione in luogo di dx, averassi essa sottangente $= \frac{3}{2} l^{\frac{1}{2}} y \times a^{\frac{1}{2}} = \frac{3ax}{2ly} = \frac{3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}}{2}$

Averà pure la noſtra curva un fleſſo contrario, per ritrovare il quale prendo le ſeconde differenze della data equazione, ſuppoſta dx coſtante, e ritrovo

$$\frac{\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} y l^{\frac{1}{2}} y \times ddy + \frac{3}{4} a^{\frac{3}{2}} dy^2 l^{-\frac{1}{2}} y - \frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{\frac{1}{2}} y}{yy} = 0,$$

e però $ddy = \dfrac{\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{\frac{1}{2}} y - \frac{3}{4} a^{\frac{3}{2}} dy^2 l^{-\frac{1}{2}} y}{\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} y l^{\frac{1}{2}} y}$; ma per lo metodo de' fleſſi contrarj, deve eſſere $ddy = 0$; adunque ſarà $\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{\frac{1}{2}} y - \frac{3}{4} a^{\frac{3}{2}} dy^2 l^{-\frac{1}{2}} y = 0$, cioè $l^{\frac{1}{2}} y - \frac{1}{2} a l^{-\frac{1}{2}} y = 0$, cioè $ly = \frac{1}{2} a$, ſarà adunque il fleſſo contrario allora quando ſia $ly = \frac{a}{2}$.

Se la propoſta curva da deſcriverſi ſarà $x l x = y$, riſoluta l'equazione in analogìa, ſarà $1, lx :: x, y$, e ſi coſtruirà in ſimil modo.

E ſe foſſe $xxlx = y$, o pure $x^3 lx = y$, o $x^{\frac{1}{3}} lx = y$, o più generalmente $x^n lx = y$, eſſendo n una qualunque poteſtà intiera o rotta di x; riſoluta iſteſſamente l'equazione nell' analogìa $1, lx :: x^n, y$, e preſa nella logaritmica una qualunque $CD = x$, onde ſia

$AC =$

$AC=lx$; il moltiplo di AC fecondo il numero n, fe è intiero; il fubmultiplo, fe è rotto, ci darà la corrifpondente ordinata nella logaritmica fteffa, che farà x^n, per la proprietà della logaritmica.

Che fe la curva conteneffe quantità, che foffero il logaritmo di logaritmo, come fe foffe $x^n llx=y$, facilmente fi averebbe nella logaritmica la linea efpreffa per llx prendendo una qualunque $CD=x$ (*Fig.* 43.), onde fia $AC=lx$, ed indi pofta AC per ordinata in (ac); imperocchè farà Aa il logaritmo di (ac), cioè llx, come ancora è ftato avvertito al num. 157.

161. Debbafi coftruire la curva efponenziale dell' equazione $x^x=y$. Adunque prendendo i logaritmi, farà $xlx=ly$. Però defcritta (*Fig.* 45.) la logaritmica PAB con la fottangente $AD=1$, e prefa una qualunque $CB=DE=x$, farà $DC=lx$; adunque poichè l'equazione fi rifolve nell'analogìa $1, x :: lx, ly$, il quarto proporzionale di AD, BC, e DC, che fia per efempio DM, farà ly; adunque $MN=y$, e però fe faraffi $EF=MN$, farà $DE=x$, $EF=y$, ed F un punto della curva da defcriverfi.

La curva taglierà l'afintoto HM in H, fatta $DH=DA$; imperocchè pofta $x=0$, farà $ly=0$, cioè y eguale alla fottangente DA. Similmente pofta $x=1=DA$, farà $lx=0$, e però $ly=0$, cioè $y=DA$; fatta adunque $AG=DH$, farà G un punto in curva.

 Dal

Dal punto H alzando l'applicata HP alla logaritmica, e conducendo POR parallela ad HD, sarà OR la minima ordinata y alla curva. Imperciocchè differenziando l'equazione, sarà $dx + dx\,lx = \frac{dy}{y}$, cioè $ydx + ydx\,lx = dy$, ma per lo metodo de' massimi, e minimi, deve essere $dy = 0$, adunque $ydx + ydx\,lx = 0$, e però $-lx = 1 = HD = DA$.

Essendo $\frac{ydx}{dy}$ la formola generale della sottangente, e dall'equazione data della curva avendosi $dx = \frac{dy}{y \times \overline{1 + lx}}$, sostituito questo valore nella formola, sarà la sottangente per un qualunque punto della curva $= \frac{1}{1 + lx}$, e per lo punto G, rispetto a cui è $x = AD$, ed in conseguenza $lx = 0$, sarà la sottangente $= 1 = AD$, sottangente della logaritmica.

Rispetto allo spazio: prendo la formola generale ydx; ma $y = x^x$, equazione della curva, sostituito adunque nella formola il valore di y, sarà $x^x dx$, e però $\int x^x dx$ lo spazio indefinito $HOFEADH$, il quale, integrando per lo num. 159., sarà $=$

$$x + \frac{xx\,lx}{2} - \frac{xx}{4} + \frac{x^3 l^2 x}{6} - \frac{x^3 lx}{9} + \frac{x^3}{27} + \frac{x^4 l^3 x}{24} - \frac{x^4 l^2 x}{32} + \frac{x^4 lx}{04} \text{ ec.}$$

E presa $x = AD = 1$, sarà $lx = 0$, e però lo spazio $HOGAD = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256}$ ec.,

cioè $= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4}$ ec.

162. Sia la curva dell' equazione $x^y = a$, sarà $ylx = la$, e però si potrà costruire per mezzo della logaritmica. Differenziando l'equazione $ylx = la$, averemo $\frac{ydx}{x} + dylx = 0$ (presa la sottangente della logaritmica $= 1$), e però sarà $dx = -\frac{xlxdy}{y}$, adunque la sottangente $= -xlx$.

163. Sia $x^x = a^y$; adunque $xlx = yla$, che si potrà costruire al solito. Prese le differenze, sarà $dx + dxlx = dyla$, e però la sottangente $= \frac{xlx}{1 + lx}$.

Ma poichè $y = \frac{xlx}{la}$, sarà ydx, cioè l'elemento dello spazio $= \frac{xlx \times dx}{la}$, ed integrando per lo num. 154.,

$\frac{2xxlx - xx}{4la}$.

164. Altre questioni ancora possono proporsi appartenenti ad equazioni esponenziali; come, per esempio, nelle equazioni esponenziali composte di sole quantità

tità cognite, ma con gl'esponenti incogniti, trovare essi esponenti.

Sia adunque $c^x = ab^{x-1}$, si dimanda il valore dell'esponente incognito x, essendo date le a, b, c; scrivo $\frac{c^x}{a} = b^{x-1}$, adunque sarà $xlc - la = \overline{x-1}\, lb$, e però $xlc - xlb = la - lb$, quindi $x = \frac{la - lb}{lc - lb}$.

165. Altra questione sarebbe questa. Trovare un numero x tale, che sia $x^x = a$, e $x^{x+p} = b$. Adunque per la prima condizione averemo $xlx = la$, e però $x = \frac{la}{lx}$, o pure $lx = \frac{la}{x}$.

Per la seconda condizione averemo $\overline{x+p}\, lx = lb$, e però sarà $x = \frac{lb - plx}{lx}$, o pure $lx = \frac{lb}{x+p}$. Adunque sarà $\frac{la}{x} = \frac{lb}{x+p}$, cioè $xla + pla = xlb$, cioè $x = \frac{pla}{lb - la}$, o pure $\frac{la}{lx} = \frac{lb - plx}{lx}$, cioè $lx = \frac{lb - la}{p}$. Ciò posto, mi faccio a sciogliere il seguente problema.

166. Dato un vaso di nota capacità pieno di un qualunque liquore, che sia per esempio vino, se ne estragga in un sorso una data quantità, poi si riempia d'acqua il vaso, indi del liquore ora misto d'acqua, e di

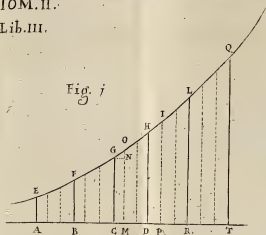
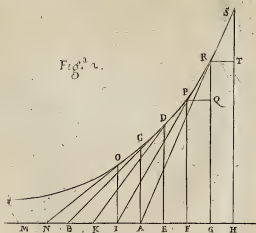
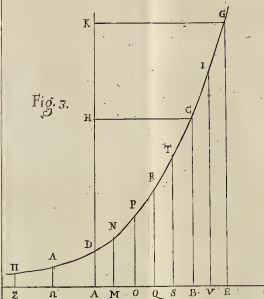
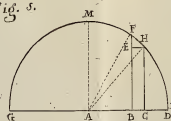
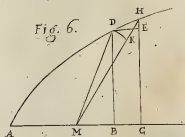
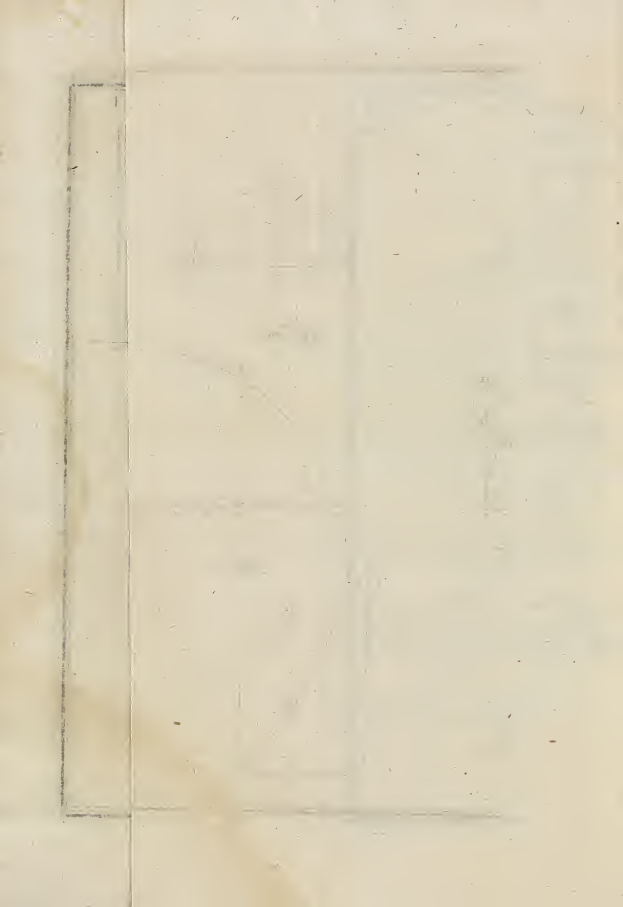
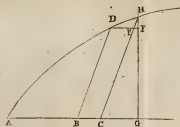
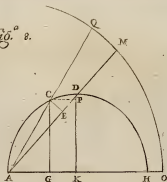
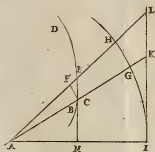
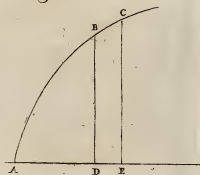
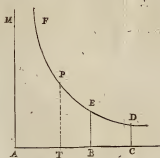
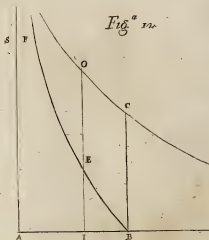
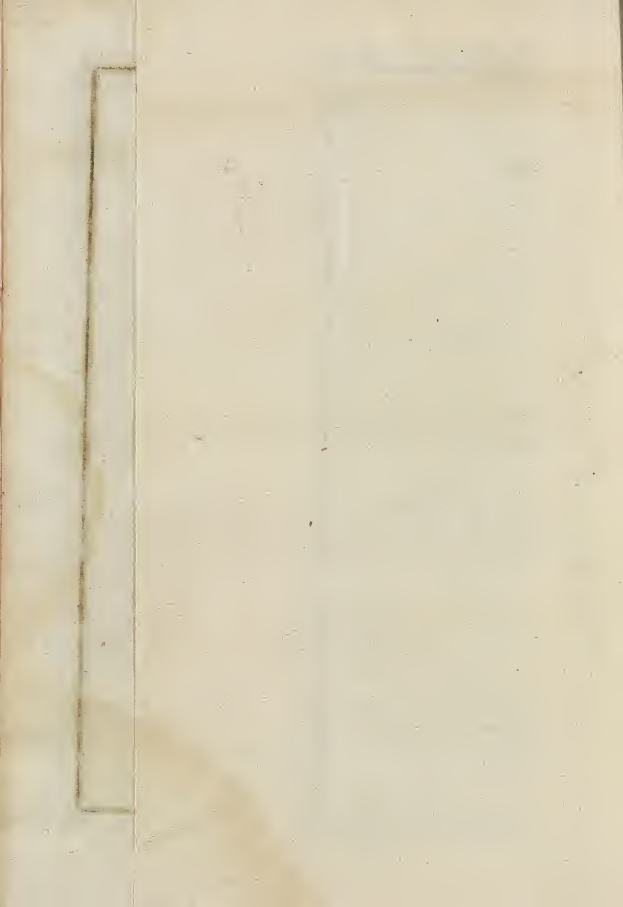
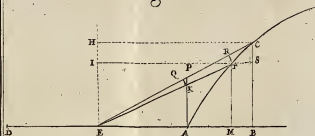
di vino, ſe ne eſtragga un'altro ſorſo eguale al primo, e di poi ſi riempia d'acqua il vaſo, e nuovamente ſi eſtragga del miſto liquore un ſorſo pure eguale al primo, e così di mano in mano ſi vada con la ſteſſa legge ripetendo l'operazione: ſi dimanda, quanti ſorſi biſognerà prendere, cioè quante volte biſognerà ripetere l'operazione, acciò ſia nel vaſo una data quantità di vino.

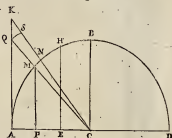
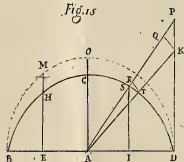
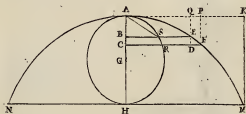
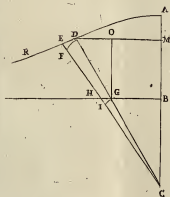
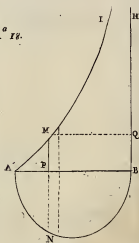
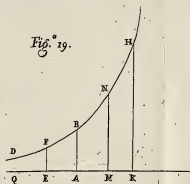
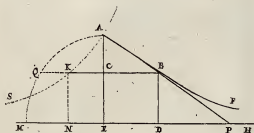
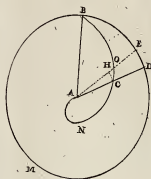
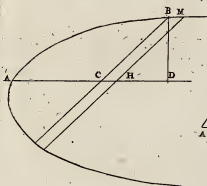
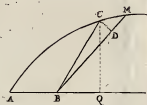
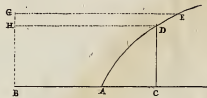
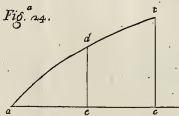
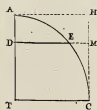
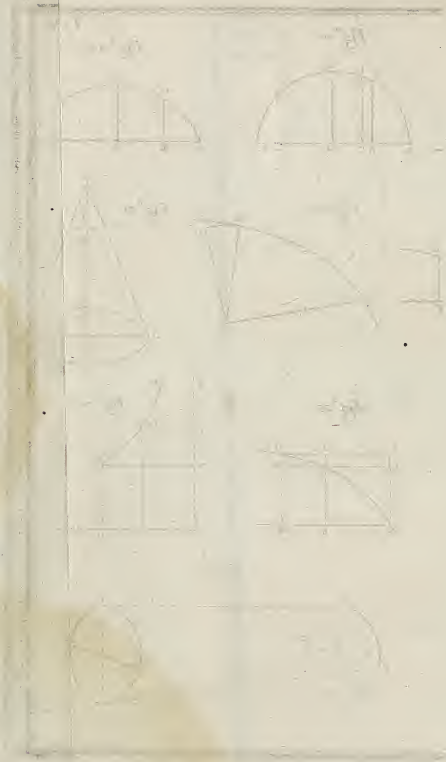
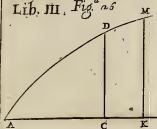
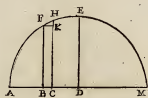
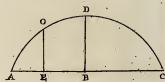
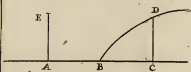
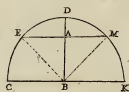
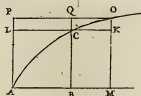
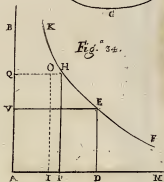
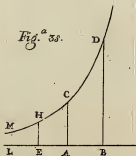
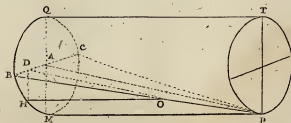
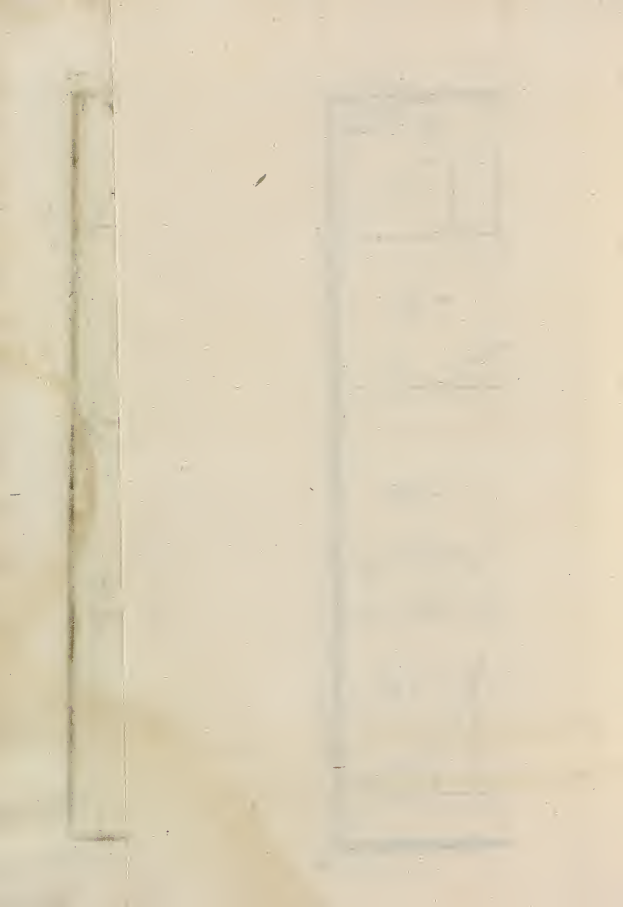
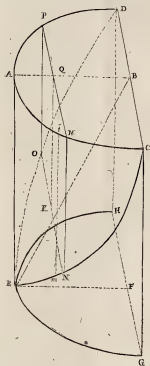
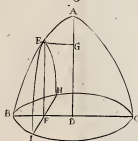
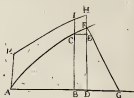
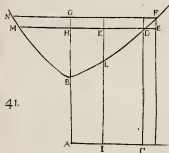
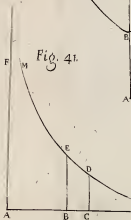
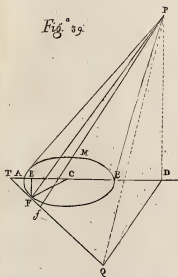
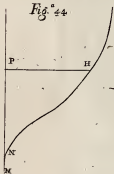
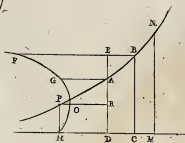
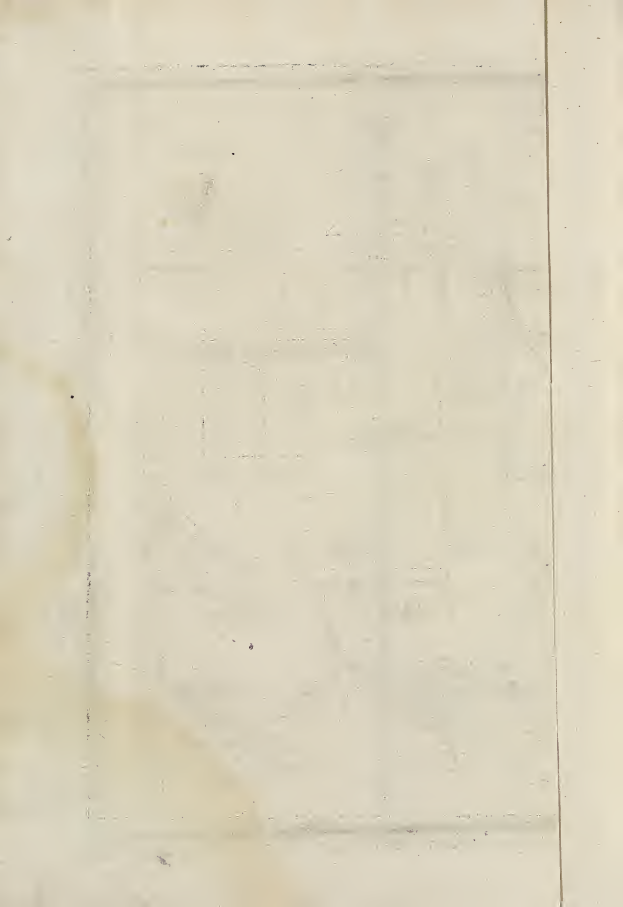
Sia $= a$ la capacità del vaſo, e ſia $= b$ la quantità di ciaſchedun ſorſo. Nel primo ſorſo adunque s'eſtraerà dal vaſo tanta quantità di vino, che ſarà $= b$, ed altrettanto s'infonderà d'acqua, onde dopo il primo ſorſo ſarà nel vaſo quantità di vino $= a - b$.

Nel ſecondo ſorſo s'eſtraerà b di liquore miſto, onde per avere la quantità del puro vino, che in eſſo ſorſo s'eſtrae, ſi faccia l'analogìa: come la capacità del vaſo (a) ſta alla quantità d'un ſorſo (b), così il vino, che è nel vaſo, ($a - b$) al quarto $\frac{ab - bb}{a}$, ſarà eſſo la quantità del puro vino, che ſi â eſtratto nel ſecondo ſorſo, rimarrà adunque nel vaſo quantità di puro vino $\frac{aa - 2ab + bb}{a}$, cioè $\frac{\overline{a - b}^2}{a}$. Pel terzo ſorſo facendo pure l'analógìa: come la capacità del vaſo (a) ſta alla quantità d'un ſorſo (b), così il vino, che è nel vaſo, $\frac{(\overline{a - b}^2)}{a}$ al quarto $\frac{\overline{a - b}^2}{a} \times \frac{b}{a}$, ſarà eſſo la

quan-

quantità del puro vino, che ſi â eſtratto nel terzo forſo, rimarrà pertanto nel vaſo quantità di puro vino $\frac{\overline{a-b}^2}{a} - \frac{b}{a} \times \frac{\overline{a-b}^2}{a}$, cioè $\frac{\overline{a-b}^3}{aa}$, e così dopo il quarto forſo ſarà nel vaſo quantità di puro vino $\frac{\overline{a-b}^4}{a^3}$, e generalmente dopo un numero n di forſi ſarà nel vaſo quantità di puro vino $\frac{\overline{a-b}^n}{a^{n-1}}$. Se adunque ſi voglia ſapere, quanti forſi debbanſi prendere, acciò nel vaſo rimanga una data quantità, che ſia per eſempio $\frac{a}{m}$ di puro vino, faremo l'equazione $\frac{\overline{a-b}^n}{a^{n-1}} = \frac{a}{m}$, la quale, per eſſere n incogoita, ſarà appunto eſponenziale. Ridotta per tanto l'equazione ai logaritmi, ſarà $l\frac{\overline{a-b}^n}{a^{n-1}} = l\frac{a}{m}$, cioè $nl\overline{a-b} = la - lm + \overline{n-1}\,la$, o ſia $nl\overline{a-b} = -lm + nla$, e però $n = \frac{lm}{la - l\overline{a-b}}$; con che ſarà facile avere il numero n col mezzo delle tavole logaritmiche.

FINE DEL TERZO LIBRO.

TOM.II.
Lib.III.
T.I.
Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

TOM.II.
Lib.III.
T.II.
Fig.a 7
D
H
E
F
A
B
C
G
Fig.a 8.
Q
M
C
D
P
E
A
G
K
H
O
Fig.a 9.
L
D
H
K
F
E
G
C
B
A
M
I
Fig.a 10.
C
B
A
D
E
Fig.a 11
M
F
P
E
D
A
T
B
C
Fig.a 12.
S
F
O
C
E
A
I
B

TOM II
Lib.III.
T III
Fig.ª 13.
Fig.ª 14.
Fig. 15
Fig.ª 16.
Fig.ª 17.
Fig.ª 18.

TOM.II
Lib. III.
T.V.
Fig.ª 26
Fig.ª 27
Fig.ª 28
Fig.ª 29
Fig.ª 30
Fig.ª 31
Fig.ª 32
Fig.ª 33
Fig.ª 34
Fig.ª 35
Fig.ª 36

TOM.II.
Lib. III.
T. VI.
Fig.ª 37.
Fig. 38.
Fig. 40.
Fig 42
Fig. 41.
Fig. 43.
Fig.ª 39.
Fig.ª 44.
Fig.ª 45.

INSTITUZIONI
ANALITICHE
LIBRO QUARTO
Del Metodo Inverso delle Tangenti.

INSTITUZIONI ANALITICHE

LIBRO QUARTO

Del Metodo Inverso delle Tangenti.

1. POichè, data una qualunque curva, il modo di ritrovare la di lei tangente, sottotangente, normale, o qualunque analoga linea si chiama *Il Metodo diretto delle Tangenti*; così, data la tangente, sottotangente, normale, o qualunque analoga linea; siccome pure data la rettificazione, o lo spazio, il modo di ritrovare quella curva, a cui compete la data proprietà della tangente, dello spazio ec., si chiama *Il Metodo inverso delle Tangenti*.

Nel secondo, e terzo libro si sono ritrovate le espressioni generali differenziali della tangente, e delle linee analoghe, come pure delle rettificazioni, e degli spazj; adunque paragonando la proprietà data della tangente, della rettificazione ec. alla rispettiva espressione, o formola generale differenziale, nascerà una equazione differenziale del primo grado, o di grado superiore, la quale integrata, o algebraicamente, o supposte le quadrature, ci darà la curva, che si ricerca, ed a

cui compete la data proprietà. Si cerchi, per esempio, la curva la di cui sottotangente debba essere eguale alla doppia assissa. Chiamate le assisse x, le ordinate y, la formola della sottotangente è $\frac{ydx}{dy}$, adunque sarà l'equazione $\frac{ydx}{dy} = 2x$. Si cerchi la curva, il di cui spazio debba essere eguale a due terzi del rettangolo delle coordinate. L'elemento dello spazio è ydx; adunque dovrà essere $\int ydx = \frac{2xy}{3}$, e però $ydx = \frac{2xdy + 2ydx}{3}$. Si cerchi la curva, la di cui proprietà sia, che un qualunque arco preso dal vertice sia eguale alla rispettiva sottonormale. L'espressione dell'arco è $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$; quella della sottonormale è $\frac{ydy}{dx}$; dunque averemo

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{ydy}{dx}, \text{ e però } \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{ydxddy + dxdy^2}{dx^2},$$

(presa per costante dx) equazione differenziale del secondo grado.

2. Le equazioni, che in questo modo risultano, averanno sempre, come è facile a vedere, le indeterminate con le differenziali tra loro miste, e confuse, quindi non si sanno per ora maneggiare a fine di passare alle integrazioni, e così avere le curve, che si

cer-

cercano, e molto meno se contengono differenziali secondi, terzi ec., poichè nell'antecedente terzo libro si sono sempre supposte le formole differenziali essere composte di una sola indeterminata con la sua differenza. Sono adunque necessarj altri ripieghi per tentare di ridurre alle integrazioni, o quadrature tali equazioni, il che si chiama *Costruire le equazioni differenziali del primo, secondo ec. grado*. E quanto a quelle del primo in due maniere si procede; l'una è di passare alle integrazioni, o quadrature senza alcuna previa separazione delle indeterminate, e loro differenziali; l'altra di separare prima le indeterminate, e così render le equazioni atte all'integrazioni, o quadrature.

Anderò spiegando varj metodi particolari per ambedue le maniere, co' quali in molte equazioni si ottiene l'intento; ma moltissime altre se ne incontrano, che si trovano affatto contumaci, almeno coi metodi fin' ora scoperti, i quali non ânno quell' universalità, che sarebbe necessaria.

CAPO

CAPO I.

Della Costruzione delle Equazioni differenziali del primo grado, senza alcuna previa separazione dell' indeterminate.

3 LE più semplici formole, che abbiano le due variabili assieme confuse, sono le due $xdy + ydx$, ed $\frac{ydx - xdy}{yy}$; l'integrale della prima è xy, della seconda è $\frac{x}{y}$, come è chiaro. A queste adunque devesi procurare di ridurre le più composte, e ciò con i soliti ajuti della semplice Analisi, aggiungendo, sottraendo, moltiplicando, dividendo ec. per quelle quantità, che fanno al proposito, le quali varie saranno, secondo i varj casi. Se ne vegga ora la pratica.

Sia $ydx = xdx - xdy$, trasportato all'altra parte il termine ultimo, sarà $ydx + xdy = xdx$, e però $xy = \frac{xx}{2} \pm bb$. Sia l'equazione $x^4 dy^2 + 2x^3 ydxdy = a^4 dx^2 - xxyydx^2$, cioè $x^4 dy^2 + 2x^3 ydxdy + xxyydx^2 = a^4 dx^2$, e dividendo per xx, $xxdy^2 + 2xydxdy + yydx^2 = \frac{a^4 dx^2}{xx}$, e cavando la radice quadrata, $xdy + ydx = \frac{aadx}{x}$, ed in-

tegran-

tegrando, $xy = alx \pm b$ nella logaritmica della sottangente $= a$. Sia l'equazione $ydx = y^3 dy + yydy + xdy$, cioè $ydx - xdy = y^3 dy + yydy$. Il primo membro sarebbe integrabile, se fosse diviso per yy, divido adunque l'equazione, onde sia $\frac{ydx - xdy}{yy} = ydy + dy$, ed integrando, $\frac{x}{y} = \frac{yy}{2} + y \pm b$.

4. Sia l'equazione $y^r dy = mydx + xdy$. Se non vi fosse il coefficiente m, la cosa sarebbe facile, poichè l'integrale del secondo membro sarebbe xy. Non riuscirà l'operazione nè meno trasportando il membro xdy nella parte opposta dell'equazione, cioè scrivendo $y^r dy - xdy = mydx$; osservo pertanto, che il differenziale di $mxy^{\frac{1}{m}}$ si è $my^{\frac{1}{m}} dx + xy^{\frac{1}{m} - 1} dy$, diverso dal proposto $mydx + xdy$ in questo solo, che è moltiplicato per $y^{\frac{1}{m} - 1}$; per rendere adunque integrabile la quantità $mydx + xdy$, basta moltiplicarla per $y^{\frac{1}{m} - 1}$, ed a fine di conservare l'egualità, moltiplicare altresì il corrispondente membro $y^r dy$ dell'equazione, e però sarà $y^{r + \frac{1}{m} - 1} dy = my^{\frac{1}{m}} dx + xy^{\frac{1}{m} - 1} dy$, ed integrando, $\int y^{r + \frac{1}{m} - 1} dy = mxy^{\frac{1}{m}} \pm b$.

Sia

Sia la medesima equazione, ma con coefficiente diverso a ciascuno degl'ultimi due termini, cioè $y^r dy = mydx + nxdy$. Il secondo membro non è integrabile; osservo però, che il differenziale di $mxy^{\frac{n}{m}}$ si è $my^{\frac{n}{m}} dx + nxy^{\frac{n-1}{m}} dy$, adunque l'omogeneo di comparazione sarebbe integrabile, se fosse moltiplicato per $y^{\frac{n-1}{m}}$; moltiplico per tanto tutta l'equazione, e sarà $y^{r + \frac{n-1}{m}} dy = my^{\frac{n}{m}} dx + nxy^{\frac{n-1}{m}} dy$, e l'integrale sarà $\int y^{r + \frac{n-1}{m}} dy = mxy^{\frac{n}{m}} \pm b$.

5. Il differenziale di $x^n y$ è $x^n dy + nyx^{n-1} dx$: Ciò posto, sia l'equazione $y^r dy = x^n dy + yx^{n-1} dx$; se l'ultimo termine avesse il coefficiente n, l'integrale del secondo membro dell'equazione sarebbe $x^n y$. Osservo però, che il differenziale di $x^n y^n$ si è $nx^n y^{n-1} dy + ny^n x^{n-1} dx$; adunque moltiplicando l'equazione per ny^{n-1}, onde sia $ny^{r+n-1} dy = nx^n y^{n-1} dy + ny^n x^{n-1} dx$, si trova integrabile, e l'integrale è $\int ny^{r+n-1} dy = x^n y^n \pm b$.

Ma se l'ultimo termine in vece del coefficiente n ne avesse un'altro, anzi generalmente, se ambedue i termini ultimi fossero affetti da coefficienti diversi; come

me se l'equazione fosse $y^r dy = cx^n dy + eyx^{n-1} dx$; osservo, che il differenziale di $\frac{e}{n} x^n y^{\frac{cn}{e}}$ si è $cx^n y^{\frac{cn}{e}-1} dy + ey^{\frac{cn}{e}} x^{n-1} dx$; adunque moltiplicando l'equazione per $y^{\frac{cn}{e}-1}$, onde sia $y^{r+\frac{cn}{e}-1} dy = cx^n y^{\frac{cn}{e}-1} dy + ey^{\frac{cn}{e}} x^{n-1} dx$, sarà integrabile, e l'integrale sarà $\int y^{r+\frac{cn}{e}-1} dy = \frac{e}{n} x^n y^{\frac{cn}{e}} \pm b$. Facciasi $r = 1$, $c = 3$, $n = 1$, $e = 1$, cioè l'equazione $ydy = 3xdy + ydx$; l'integrale sarà $\frac{y^4}{4} = xy^3$. Facciasi $c = 2$, $e = 3$, $n = 1$, $r = 1$, cioè l'equazione $ydy = 2xdy + 3ydx$, l'integrale sarà $\frac{y^{1+\frac{2}{3}}}{1+\frac{2}{3}} = 3xy^{\frac{2}{3}}$, cioè $\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} = 3xy^{\frac{2}{3}}$. Facciasi $c = 2$, $e = 2$, $n = 3$, $r = 3$, cioè l'equazione $y^3 dy = 2x^3 dy + 2yxxdx$, l'integrale sarà $\frac{y^6}{6} = \frac{2}{3} x^3 y^3$.

Se l'equazione fosse espressa così $y^{1-\frac{cn}{e}} x^r dx = cx^n dy + eyx^{n-1} dx$, è chiaro a vedere, che sarebbe in-

 tegra-

tegrabile, poichè moltiplicata per $y^{\frac{cn-1}{e}}$ ſarebbe $x^r dx = cx^n y^{\frac{cn-1}{e}} dy + ey^{\frac{cn}{e}} x^{n-1} dx$, ma l'integrale del ſecondo membro ſi è veduto, eſſere $\frac{e}{n} x^n y^{\frac{cn}{e}}$, adunque ec.

6. Sia ora l'equazione $y^r dy = \frac{2xdy - ydx}{xx}$. Se non vi foſſe il coefficiente 2, l'integrale del ſecondo membro ſarebbe $\frac{y}{x}$. Ma non perciò ſervirà traſportare alla oppoſta parte il termine xdy, e ſcrivere $y^r dy - \frac{xdy}{xx} = \frac{xdy - ydy}{xx}$; oſſervo però, che il differenziale di $\frac{yy}{x}$ ſi è $\frac{2xydy - yydx}{xx}$, dunque ſe ſi moltiplicherà l'equazione propoſta per y, onde ſia $y^{r+1} dy = \frac{2xydy - yydx}{xx}$, ſarà integrabile, e l'integrale ſarà $\int y^{r+1} dy = \frac{yy}{x} \pm b$. Ma più generalmente ſia un qualunque coefficiente n, e però l'equazione $y^r dy = \frac{nxdy - ydx}{xx}$. Oſſervo, che il differenziale di $\frac{y^n}{x}$ è $\frac{nxy^{n-1} dy - y^n dx}{xx}$, adunque ſe ſi moltiplicherà l'equazione per y^{n-1}, onde ſia $y^{r+n-1} dy = \frac{nxy^{n-1} dy - y^n dx}{xx}$, ſarà integrabile, e l'in-

l'integrale sarà $\int y^{r+n-1}dy = \frac{y^n}{x} \pm b$.

Anzi abbiano ambi gli ultimi due termini coefficiente diverso, e sia l'equazione $y^r dy = \frac{nxdy - mydx}{xx}$.

Osservo, che il differenziale di $\frac{my^{\frac{n}{m}}}{x}$ si è

$\frac{nxy^{\frac{n-1}{m}} dy - my^{\frac{n}{m}} dx}{xx}$; adunque se si moltiplicherà l'equazione per $y^{\frac{n-1}{m}}$, onde sia $y^{r + \frac{n-1}{m}} dy =$ $\frac{nxy^{\frac{n-1}{m}} dy - my^{\frac{n}{m}} dx}{xx}$, sarà integrabile, e l'integrale sarà

$\int y^{r + \frac{n-1}{m}} dy = \frac{my^{\frac{n}{m}}}{x} \pm b$.

Se l'equazione fosse $y^{1 - \frac{n}{m}} x^r dx = \frac{nxdy - mydx}{xx}$, sarebbe pure integrabile, poichè moltiplicata per $y^{\frac{n-1}{m}}$ sarà $x^r dx = \frac{nxy^{\frac{n-1}{m}} dy - my^{\frac{n}{m}} dx}{xx}$; ma l'integrale del secondo membro si sa, essere $\frac{my^{\frac{n}{m}}}{x}$, dunque ec.

Alle suddette equazioni manchi il denominatore xx, e sia l'equazione $y^r dy = nxdy - ydx$. Per sommare la seconda parte dell'equazione, bisognerebbe moltiplicarla per y^{n-1}, e dividerla per xx; ma ciò dovendosi fare anche rispetto alla prima parte, sarebbe essa $\frac{y^{r+n-1}dy}{xx}$, che in nessuna maniera si può sommare; adunque si mutino i segni all'equazione, e sarà $-y^r dy = ydx - nxdy$. Osservo, che il differenziale di $\frac{x}{y^n}$ si è $\frac{y^n dx - nxy^{n-1}dy}{y^{2n}}$; adunque se si moltiplicherà l'equazione per y^{n-1}, ed indi se si dividerà per y^{2n}, onde sia $\frac{-y^{r+n-1}dy}{y^{2n}} = \frac{y^n dx - nxy^{n-1}dy}{y^{2n}}$, sarà integrabile, e l'integrale sarà

$$\int \frac{-y^{r+n-1}dy}{y^{2n}} = \frac{x}{y^n} \pm b.$$

Abbia l'equazione ambi gli ultimi due termini con il coefficiente, e sia $y^r dy = nxdy - mydx$. Si mutino i segni, e sarà $-y^r dy = mydx - nxdy$; osservo, che il differenziale di $\frac{x}{my^{\frac{n}{m}}}$ è $\frac{my^{\frac{n}{m}}dx - nxy^{\frac{n}{m}-1}dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}}$; adunque se si moltiplicherà l'equazione per $y^{\frac{n}{m}-1}$, e si dividerà

per

per $mmy^{\frac{2n}{m}}$, onde sia $\frac{-y^{r+\frac{n-1}{m}}dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}} = \frac{mv^{\frac{n}{m}}dx - nxy^{\frac{n-1}{m}}dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}}$, sarà integrabile, e l'integrale sarà

$$\int \frac{-y^{r+\frac{n-1}{m}}dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}} = \frac{x}{my^{\frac{n}{m}}} \pm b.$$

7. Sia l'equazione $y^r dy = x^n dy - nyx^{n-1}dx$. Si mutino i segni, e sarà $-y^r dy = nyx^{n-1}dx - x^n dy$; osservo, che il differenziale di $\frac{x^n}{y}$ è $\frac{nyx^{n-1}dx - x^n dy}{yy}$, dunque dividendo l'equazione per yy, onde sia $-y^{r-2}dy = \frac{nvx^{n-1}dx - x^n dy}{yy}$, sarà integrabile, e sarà l'integrale $\int - y^{r-2}dy = \frac{x^n}{y} \pm b$.

Ma se mancasse il coefficiente n, e l'equazione fosse $y^r dy = x^n dy - yx^{n-1}dx$; si mutino i segni, e sarà $-y^r dy = yx^{n-1}dx - x^n dy$. Osservo, che il differenziale di $\frac{x^n}{y^n}$ è $\frac{ny^n x^{n-1}dx - nx^n y^{n-1}dy}{y^{2n}}$; dunque moltiplicando l'equazione per ny^{n-1}, e dividendola

per

per y^{2n}, onde sia $\frac{-ny^{r+n-1}dy}{y^{2n}} = \frac{ny^n x^{n-1}dx - nx^n y^{n-1}dy}{y^{2n}}$, sarà integrabile, e l'integrale sarà $\int \frac{-ny^{r+n-1}dy}{y^{2n}} = \frac{x^n}{y^n} \pm b$.

Che se in luogo del coefficiente n ve ne fosse un'altro di natura diversa; anzi se ambi gl'ultimi termini fossero affetti da coefficiente diverso, come se l'equazione fosse $y^r dy = cx^n dy - eyx^{n-1}dx$, si mutino i segni, e sarà $-y^r dy = eyx^{n-1}dx - cx^n dy$. Osservo, che il differenziale di $\frac{x^n}{ey^{\frac{nc}{e}}}$ è $\frac{ney^{\frac{nc}{e}} x^{n-1}dx - ncx^n y^{\frac{nc}{e}-1} dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}}$; dunque moltiplicando l'equazione per $ny^{\frac{nc}{e}-1}$, e dividendola per $eey^{\frac{2nc}{e}}$, onde sia $\frac{-ny^{r+\frac{nc}{e}-1}dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}} = \frac{ney^{\frac{nc}{e}} x^{n-1}dx - ncx^n y^{\frac{nc}{e}-1}dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}}$, sarà integrabile, e l'integrale sarà $\int \frac{-ny^{r+\frac{nc}{e}-1}dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}} = \frac{x^n}{ey^{\frac{nc}{e}}} \pm b$.

Ma

Ma se l'equazione fosse espressa così $y^{1 - \frac{nc}{e}} x^r dx = cx^n dy - eyx^{n-1} dx$; senza mutare i segni osservo, che il differenziale di $\frac{ey^{\frac{nc}{e}}}{x^n}$ si è $\frac{ncx^n y^{\frac{nc}{e} - 1} dy - ney^{\frac{nc}{e}} x^{n-1} dx}{x^{2n}}$; dunque moltiplicando l'equazione per $ny^{\frac{nc}{e} - 1}$, e dividendola per x^{2n}, onde sia $\frac{nx^r dx}{x^{2n}} =$

$\frac{ncx^n y^{\frac{nc}{e} - 1} dy - ney^{\frac{nc}{e}} x^{n-1} dx}{x^{2n}}$, sarà integrabile, e sarà l'integrale $\int \frac{nx^r dx}{x^{2n}} = ey^{\frac{nc}{e}} \pm b$.

8. E' stato detto da me al num. 17. dell'antecedente libro, che ogni qual volta il numeratore d'una frazione composta di una sola indeterminata, e delle costanti, sia il differenziale preciso del denominatore, o pure un proporzionale di esso differenziale, l'integrale della formola è il logaritmo del denominatore, o il proporzionale di esso logaritmo. Ciò vale per tanto anche quando la formola contenga due indeterminate fra se miste coi loro differenziali. L'integrale adunque di $\frac{dx + dy}{x + y} = dz$ (dz è in qualunque modo data per x, o

per

per y) farà $l\,\overline{x+y} = z \pm b$. L'integrale di $\frac{dx + dy}{2x + 2y} = dz$ farà $l\sqrt{x+y} = z + b$. L'integrale di $\frac{4xdx - 4ydy}{xx - yy} = dz$ farà $2\,l\,\overline{xx - yy} = z \pm b$. L'integrale di $\frac{xdy + ydx - 2ydy}{2xy - 2yy} = dz$ farà $l\sqrt{xy - yy} = z \pm b$. E generalmente l'integrale di

$$\frac{my^n x^{m-1} dx + nx^m y^{n-1} dy - \overline{m-n} \times y^{m+n-1} dy}{r \times \overline{x^m y^n - y^{m+n}}} = dz$$

farà $l\sqrt[r]{x^m y^n - y^{m+n}} = z \pm b$; e così di qualunque altra equazione, che abbia la assegnata condizione.

9. Molte equazioni però, febbene non ânno la neceffaria condizione, poffono facilmente con gli ajuti dell' algebra ridurfi ad averla. Così l'equazione $\frac{xdy + ydx}{x} = -dy$ non â nel primo membro la condizione, che fi ricerca; l'avrà però, fe fi divida per y, onde fia $\frac{xdy + ydx}{xy} = -\frac{dy}{y}$, e però integrando, $l\,xy = ly^{-1} \pm lb$.

Sia l'equazione $axdy + 2aydx = xydy$; la divido per axy, e farà $\frac{xdy + 2ydx}{xy} = \frac{dy}{a}$, la quale farebbe integrabile, fe nel fecondo termine del primo membro non vi

vi fosse il coefficiente 2, sottraggo adunque la quantità $\frac{ydx}{xy}$ dall'uno, e dall'altro membro, e sarà $\frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{dy}{a} - \frac{ydx}{xy}$, cioè $\frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{dy}{a} - \frac{dx}{x}$, e però integrando, $lxy = \frac{y}{a} - lx \pm lb$.

Sia l'equazione $yxdx = \overline{xxydy + y^3dy}\sqrt{y} - yydy$, la divido per y, e sarà $xdx = \overline{xxdy + yydy}\sqrt{y} - ydy$, cioè $xdx + ydy = \overline{xxdy + yydy}\sqrt{y}$, e di nuovo dividendo per $xx + yy$, $\frac{xdx + ydy}{xx + yy} = dy\sqrt{y}$, ed integrando,

$l\sqrt{xx + yy} = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \pm b$.

10. Dalli numeri 31., e 32. dello stesso sopra citato libro terzo si ricava, che una qualunque formola composta di una sola variabile, se sarà il prodotto di qual si sia quantità complessa elevata a potestà positiva, o negativa, intiera, o rotta nel differenziale preciso, o nel proporzionale del differenziale de' termini della quantità, sarà sempre integrabile, e l'integrale sarà la stessa quantità, il di cui esponente sia quello di prima, ma accresciuto dell'unità, e moltiplicato nello stesso esponente così accresciuto, ma inversamente preso; cioè, che è lo stesso, per esso divisa; o pure esso integrale sarà un proporzionale di quello. Nulla meno vale la

regola, quando le formole differenziali sieno ancora composte di due variabili, e loro differenziali promiscuamente, purchè abbiano la notata condizione.

L'integrale adunque di $\overline{dx + dy}\sqrt{x+y} = dz$ (dz è in qualunque modo data per x, o per y) sarà

$\frac{2}{3} \times \overline{x+y}^{\frac{3}{2}} = z \pm b$. L'integrale di

$\overline{\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy}\sqrt{x+y} = dz$ sarà $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \overline{x+y}^{\frac{3}{2}} = z \pm b$,

cioè $\frac{1}{3} \times \overline{x+y}^{\frac{3}{2}} = z \pm b$. L'integrale di $\frac{2adx + 2bdy}{\sqrt{ax+by}} = dz$

sarà $4\sqrt{ax+by} = z \pm b$. L'integrale di

$\frac{p^3dq + 3qppdp + 3pqqdq + q^3dp}{2\sqrt{p^3q + q^3p}} = dz$ sarà $\sqrt{p^3q + q^3p} =$

$z \pm b$. L'integrale di $\overline{xdy + ydx + 2ydy} \times b \times \overline{xy+yy}^{\frac{n}{m}} = dz$

sarà $\frac{mb}{m+n} \times \overline{xy+yy}^{\frac{m+n}{m}} = z \pm b$. L'integrale di

$\frac{xdy + ydx + 2ydy}{b \times \overline{xy+yy}^{\frac{n}{m}}} = dz$ sarà $\frac{m \times \overline{xy+yy}^{\frac{m-n}{m}}}{\overline{m-n} \times b} = z \pm b$.

E così di mille altre di simil sorta.

Tal

Tal ora però avranno le equazioni bisogno prima di qualche preparazione. Sia l'equazione $xxdx + xydy + yydx = dz$, (dz è data in qualunque modo per x) la moltiplico per x, e sarà $x^3dx + xxydy + yyxdx = xdz$, cioè $xdx \times \overline{xx+yy} + ydy \times xx = xdz$, che non â la condizione necessaria; l'avrebbe però, se ydy fosse altresì moltiplicata in yy, aggiungo adunque all'uno, ed all'altro membro il termine y^3dy, e sarà $xdx \times \overline{xx+yy} + ydy \times xx + y^3dy = xdz + y^3dy$, cioè $\overline{xdx+ydy} \times \overline{xx+yy} = xdz + y^3dy$, capace d'integrazione, e però integrando, $\frac{\overline{xx+yy}^2}{4} = \frac{y^4}{4} \pm b + \int xdz$.

Ma non è così facile a riconoscere, quale quantità debba aggiungersi, o sottrarsi, o quale altra alterazione possa farsi alle equazioni, a fine di renderle capaci del suddetto metodo, così che quando le equazioni sieno alquanto composte, l'arrivare in questo modo al fine si potrà dire una fortuna, un caso; quindi in tali incontri bisognerà ricorrere ai metodi della separazione delle indeterminate, e però sia

CAPO II.

Della Coſtruzione delle Equazioni differenziali del primo grado per mezzo della precedente ſeparazione delle Indeterminate.

11. Di alcune equazioni, quantunque pochiſſime, ſuccede la ſeparazione delle indeterminate con le ſole operazioni prime dell'algebra ordinaria. Tale ſarebbe l'equazione $xxdx^2 + xydxdy = aady^2$, in cui oſſervo, che il primo membro è una formola di quadratica affetta dal lato, che ſarebbe un quadrato, ſe vi foſſe di più la quantità $\frac{yydy^2}{4}$. Aggiungo per tanto all'uno, ed all'altro membro la quantità $\frac{yvdv^2}{4}$, e l'equazione ſarà $xxdx^2 + xydxdy + \frac{vvdv^2}{4} = aady^2 + \frac{yydy^2}{4}$, ed eſtraendo la radice, $xdx + \frac{ydy}{2} = dy\sqrt{\frac{yy}{4} + aa}$, in cui ſono ſeparate le variabili, e però integrando, $\frac{xx}{2} + \frac{yy}{4} = \int dy\sqrt{aa + \frac{yy}{4}} \pm b$. L'integrale del ſecondo membro dipende dalla quadratura dell'iperbola.

12.

12. Il più delle volte adunque conviene servirsi delle sostituzioni. Sia l'equazione $aadx = xxdy + 2xydy + yydy$. Si ponga $x + y = z$, (la z è una nuova indeterminata) e però $dx + dy = dz$, ed $xx + 2xy + yy = zz$. Fatte adunque le sostituzioni, sarà $aadz - aady = zzdy$, cioè $\frac{aadz}{aa + zz} = dy$, equazione, in cui sono separate le variabili.

L'integrale del primo membro dipende dalla rettificazione del circolo.

Sia l'equazione $\overline{xdy + ydx}\sqrt{a^4 - xxyy} = \frac{xdx + ydy}{\sqrt[4]{xx + yy}\sqrt{xx + yy}}$. Osservo nel primo membro, che l'integrale di $xdy + ydx$ si è xy, e che il quadrato di questo integrale si trova precisamente nella quantità $\sqrt{a^4 - xxyy}$; adunque se porrò $xy = z$, nel primo membro saranno separate le variabili, e sarà esso $dz\sqrt{a^4 - zz}$. Osservo in oltre, che nel secondo membro l'integrale di $xdx + ydy$ è $\frac{xx + yy}{2}$, e che simili a questo integrale sono le quantità nel denominatore; adunque con la sostituzione di $xx + yy = 2p$ si separeranno le indeterminate anche nel secondo membro, e l'equazione sarà

$$dz\sqrt{a^4 - zz} = \frac{dp}{\sqrt[4]{2p}\sqrt{2p}}.$$

Sia

Sia l'equazione $\frac{2xdy - 2ydx}{\overline{x-y}^2} = dz$ (la dz è data in qualſivoglia modo per x , o per y) . L'integrale di $xdy - ydx$ ſi averà quando ſi divida per xx, e ſarà $\frac{y}{x}$.

Suppongaſi adunque $\frac{y}{x} = \frac{p}{a}$, e però $\frac{xdy - ydx}{xx} = \frac{dp}{a}$, e $2xdy - 2ydx = \frac{2xxdp}{a}$. Fatta per tanto la ſoſtituzione, ſarà $\frac{2xxdp}{a \times \overline{xx - 2xy + yy}} = dz$, e dividendo il numeratore, e denominatore del primo membro per xx, ſarà $\frac{2dp}{a \times \overline{1 - \frac{2y}{x} + \frac{yy}{xx}}} = dz$; ma ſi è poſto $\frac{y}{x} = \frac{p}{a}$, ed $\frac{yy}{xx} = \frac{pp}{aa}$, adunque ſarà $\frac{2adp}{aa - 2ap + pp} = dz$; e giacchè l'integrale di queſta equazione è algebraico, anderò avanti per l'integrazione; e però ſia $a - p = q$, adunque $-\frac{2adq}{qq} = dz$, ed integrando, $\frac{2a}{q} \pm b = z$. Ma $q = a - p$, e $p = \frac{ay}{x}$, e però $q = \frac{ax - ay}{x}$; reſtituito per tanto queſto valore, ſarà $\frac{2x}{x-y} \pm b = z$, che è la curva dell'equazione differenziale propoſta. Se in luogo di fare $a - p = q$, ſi aveſſe fatto

fatto $p-a=q$, averebbesi trovato altro integrale, ma diverso solo ne' segni.

13. La sopra scritta equazione mi porge occasione di fare una importante avvertenza; ed è, che le curve non solo mutano tal ora natura nel prendere le sommatorie, o semplicemente, o coll'addizione della costante, il che è stato notato fino dalla prima origine delle quantità infinitesime, ma alle volte ci si presentano pure formole tali, che ammettono integrazioni affatto diverse, e ci somministrano curve di vario genere anche senza aggiungere costante alcuna, il che merita qualche riflesso.

Per mezzo della supposizione $\frac{y}{x}=\frac{p}{a}$ è stata integrata l'equazione $\frac{2xdy-2ydx}{\overline{x-y}^2}=dz$, e l'integrale si è trovato, essere $\frac{2x}{x-y}=z$, ommessa la costante. Faccio ora la supposizione di $\frac{x}{y}=\frac{p}{a}$, e tento l'integrazione; sarà dunque $\frac{ydx-xdy}{yy}=\frac{dp}{a}$, e però $2xdy-2ydx=-\frac{2yydp}{a}$, e sostituendo, sarà l'equazione $\frac{-2dp}{a\times\overline{\frac{xx}{yy}-\frac{2x}{y}+1}}=dz$;

ma

ma $\frac{x}{y} = \frac{p}{a}$, dunque $\frac{-2adp}{pp - 2ap + aa} = dz$; e fatta $p - a = q$, $-\frac{2adq}{qq} = dz$, ed integrando, $\frac{2a}{q} = z$; quindi restituiti i valori, $\frac{2y}{x - y} = z$, integrale della proposta equazione differenziale, e diverso dal primo.

Altro integrale della proposta formola diverso dai primi due si è $\frac{x + y}{x - y} = z$; ed in fatti differenziando, sarà $\frac{xdx - ydx + xdy - ydy - xdx - ydx + xdy + ydy}{\overline{x - y}^2} = dz$, e cancellati i termini, che si elidono, $\frac{2xdy - 2ydx}{\overline{x - y}^2} = dz$, che è l'equazione da prima proposta.

Sia $dz = dy$, e la proposta equazione $\frac{2xdy - 2ydx}{\overline{x - y}^2} = dy$. Se mi servo del secondo integrale ritrovato, nasce l'equazione $\frac{2y}{x - y} = y$, e perciò $2 + y = x$, luogo al triangolo. Se poi mi servo del primo, e del terzo integrale ponendo $\frac{2x}{x - y} = y$, ovvero $\frac{x + y}{x - y} = y$, la curva è del secondo grado.

Ge-

Generalmente ſia $\frac{2xdy - 2ydx}{\overline{x-y}^{2}} = y^m dy$. Adoperata la prima, e la terza integrazione, la curva indi naſcente monterà al grado $m+2$, mentre ſia m numero poſitivo; fatto uſo della ſeconda, la curva reſterà un paſſo addietro.

14. Ma oltre che nè meno il metodo delle ſoſtituzioni è univerſale, la maggiore difficoltà ſi è, che per lo più è molto difficile il ſapere, quale ſoſtituzione debba farſi, per non operare a caſo, e gittare molta fatica inutilmente. Tuttavia però ſi procederà con la totale ſicurezza in tutte quelle equazioni, nelle quali la ſomma degli eſponenti dell' incognite ſia la ſteſſa per ciaſcun termine, e ſuccederà ſempre la ſeparazione delle indeterminate; nè importa che ſieno eſſe equazioni affette di radicali, o di frazioni, o di ſerie, e che i coefficienti, e ſegni ſieno in qualunque maniera. La ſoſtituzione da farſi in tutte queſte equazioni ſarà col porre una delle variabili eguale al prodotto dell'altra in una nuova variabile di modo, che ſe l'equazione è data per x, ed y, ſi faccia $x = \frac{yz}{a}$, o pure $y = \frac{xz}{a}$; (per lo denominatore a ſi intenda una qualunque coſtante a piacere) e però $dy = \frac{xdz + zdx}{a}$, e fatte le ſoſtituzioni, ſi arriverà ad un'altra equazione, la quale

farà sempre divisibile per tanta potestà dell'indeterminata x, quanta era la somma degl'esponenti di x, ed y in ogni termine dell'equazione proposta, quindi fatta la divisione, la lettera x non oltrepasserà la prima potestà, e farà sempre moltiplicata in dz, onde si ridurrà l'equazione in modo, che da una parte vi sia $\frac{dx}{x}$, e dell'altra dz con le sole funzioni di z, e così saranno separate le variabili. Imperciocchè chiamando A tutti que' termini, che sono moltiplicati nella dy, e B quelli, che sono moltiplicati nella dx, l'equazione sarà $A dy = B dx$, e le A, B sono date promiscuamente per x, ed y. Ora poichè le dimensioni della lettera y assieme con le dimensioni della lettera x in ogni termine fanno lo stesso numero, se in luogo di y si porrà $\frac{xz}{a}$, ne verrà, che in ciascun termine delle quantità A, B la lettera x abbia la stessa dimensione, che prima avevano x, ed y assieme; per lo che, se questa dimensione si chiamerà n, l'equazione sarà divisibile per x^n, rimanendo solo z, a, dy, dx. Suppongasi, che dopo la sostituzione di $\frac{xz}{a}$, e dopo la divisione per x^n ciò, che rimane nella quantità A, sia C; e ciò, che rimane nella quantità B, sia D; farà l'equazione $C dy = D dx$, e le C, D sono date per z, e per le costanti, ma

$dy =$

$dy = \frac{xdz + zdx}{a}$; adunque ſarà l'equazione $\frac{Cxdz + Czdx}{a} = Ddx$, cioè $Dadx - Czdx = Cxdz$, e però $\frac{dx}{x} = \frac{Cdz}{Da - Cz}$, e così le indeterminate coi loro differenziali ſaranno ſeparate, e l'equazione coſtruibile, almeno per le quadrature.

E' indifferente il porre $y = \frac{zx}{a}$, o pure $x = \frac{yz}{a}$, poichè sì nell'una, come nell'altra maniera ſi ſeparano ſempre le indeterminate; ma alle volte una ſoſtituzione piuttoſto, che l'altra ci darà l'equazione più ſemplice, e di minori termini, o la coſtruzione più facile, e più elegante; quindi non ſarà mal fatto il provarle tutte due, ed in fine appigliarſi a quella, che riuſcirà la migliore.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $xxdy = yydx + xydx$. Pongo $y = \frac{xz}{a}$, e però $dy = \frac{xdz + zdx}{a}$; fatte le ſoſtituzioni, ſarà $\frac{x^3dz + zxxdx}{a} = \frac{xxzzdx}{aa} + \frac{zxxdx}{a}$, e riducendo al comun denominatore, e dividendo per xx, ſarà $axdz + azdx = zzdx + azdx$, cioè $axdz = zzdx$, e $\frac{dx}{ax} = \frac{dz}{zz}$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $xxdy = yydx + xxdx$. Posta $y = \frac{xz}{a}$, $dy = \frac{xdz + zdx}{a}$, e fatte le sostituzioni, sarà $\frac{x^3 dz + zxxdx}{a} = \frac{zzxxdx}{aa} + xxdx$, e riducendo al comun denominatore, e dividendo per xx, sarà $axdz + azdx = zzdx + aadx$, cioè $zzdx - azdx + aadx = axdz$, e però $\frac{dx}{x} = \frac{adz}{zz - az + aa}$. Facendo poi l'altra sostituzione $x = \frac{yp}{a}$, e $dx = \frac{ydp + pdy}{a}$, sarà $\frac{ppyydy}{aa} = \frac{y^3 dp + pyydy}{a} + \frac{y^3 ppdp + p^3 yydy}{a^3}$, e dividendo per yy, $appdy = aaydp + aapdy + yppdp + p^3 dy$, cioè $appdy - aapdy - p^3 dy = aaydp + yppdp$, e però $\frac{dy}{y} = \frac{aadp + ppdp}{app - aap - p^3}$.

ESEM-

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $dy\sqrt{xx+yy}=ydx$. Posta $y=\frac{xz}{a}$, e $dy=\frac{xdz+zdx}{a}$, e fatte le sostituzioni, sarà
$\frac{xdz+zdx}{a}\sqrt{\frac{xxzz+aaxx}{a}}=\frac{zxdx}{a}$, cioè
$\overline{xxdz+zxdx}\sqrt{aa+zz}=azxdx$, e dividendo per x,
$xdz\sqrt{aa+zz}+zdx\sqrt{aa+zz}=azdx$, o sia
$xdz\sqrt{aa+zz}=azdx-zdx\sqrt{aa+zz}$, e però
$\frac{dz\sqrt{aa+zz}}{az-z\sqrt{aa+zz}}=\frac{dx}{x}$. Se avessi posto $x=\frac{yp}{a}$, avrei avuta l'equazione $\frac{dy}{y}=\frac{dp}{\sqrt{aa+pp}-p}$.

15. Ma alle volte i differenziali medesimi dx, e dy ascendono a dimensioni più alte, essendovi per altro nelle equazioni la condizione espressa di sopra. In questi casi la sostituzione, come prima, fatta di $\frac{xz}{a}$ in luogo della y (lasciando per ora intatta la dy) renderà ogni termine dell'equazione divisibile per la stessa potestà di x, e vi resteranno solo nell'equazione z, dx,

e

e dy con le coſtanti date, ed aſſunte, ma non più la x. Ora perchè in luogo pure di dy ſi deve porre $\frac{zdx + xdz}{a}$, con che di nuovo ſi introduce la lettera x, ſi faccia $\frac{xdz}{a} = dt$, ed in luogo di dy ſi ſcriva $\frac{zdx + adt}{a}$, e l'equazione averà ſolamente z, dt, dx con le coſtanti date, ed aſſunte, ma non più x. Si faccia a, u :: dx, dt, ed in luogo di dt ſi ponga da pertutto $\frac{udx}{a}$, ne verrà un'equazione libera dalle quantità differenziali, in cui ſi avranno le ſole u, z, e le coſtanti per una curva algebraica. Per mezzo di queſta curva ſi troveranno i valori reali della u; ſieno adunque queſti A, B, C ec. in modo, che ſia $u = A$, $u = B$, $u = C$ ec., ſaranno A, B ec. date ſolamente per z, e per le coſtanti, e ſarà $dx = \frac{adt}{A}$, $dx = \frac{adt}{B}$ ec., e perchè $dt = \frac{xdz}{a}$, ſarà $dx = \frac{xdz}{A}$, $dx = \frac{xdz}{B}$ ec.; onde finalmente $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{A}$, $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{B}$ ec., ed i logaritmi della x ſaranno direttamente proporzionali agli ſpazj compreſi dalle curve, delle quali le aſſiſſe eſſendo z, le ordinate ſieno reciprocamente proporzionali ai valori di ſopra ritrovati della quantità u, e tante ſaranno le curve, che soddisfaranno, quanti ſaranno i valori reali fra ſe diverſi della

della lettera u, avvertendo però, che l'aggiungere la coſtante nelle integrazioni delle equazioni $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{A}$, $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{B}$ ec. può nuovamente diverſificare le curve, che ſoddisfanno al queſito, e raddoppiare ſpeſſe volte il numero loro. Sarà dunque $lx =$ allo ſpazio di quella curva, che abbia per aſſiſſa z, e per ordinata $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$ ec., cioè eguale all'integrale di $\frac{dz}{A}$, $\frac{dz}{B}$ ec.; quindi prendendo z arbitraria, il logaritmo della x ſarà dato, e per conſeguenza anche data la corriſpondente x ordinata nella logaritmica. Data adunque la x, per mezzo dell' equazione $y = \frac{xz}{a}$, ſarà anche data la y, cioè ambe le coordinate dell'equazione differenziale propoſta, o ſia della curva, che ſi cerca. A miſura de' diverſi valori, che ſi daranno alla z, ſaranno anche diverſi i punti della ſteſſa curva cercata.

ESEMPIO.

Applicherò la regola ad un'eſempio: ſia l'equazione $xxdy^2 + xydxdy = xxdx^2$. Si faccia adunque $y = \frac{xz}{a}$, e collocato queſto valore nell'equazione in luogo di y, ave-

averemo $axxdy^2 + xxzdxdy = axxdx^2$, e fatta la divisione per xx, sarà $ady^2 + zdxdy = adx^2$, onde si vede, che x, e le sue funzioni interamente spariscono, restandovi solo z, dx, dy con le loro funzioni. Ma perchè collocando in luogo di dy il suo valore $\frac{zdx + xdz}{a}$ s'introdurrebbe di nuovo nell'equazione la x, si faccia $\frac{xdz}{a} = dt$, e però $dy = \frac{zdx + adt}{a}$, e l'equazione sarà $\frac{zzdx^2 + 2azdxdt + aadt^2}{a} + \frac{zzdx^2 + azdxdt}{a} = adx^2$, cioè $2zzdx^2 + 3azdxdt + aadt^2 = aadx^2$, in cui entrano le sole z, dx, dt con le loro funzioni. Di nuovo supposta $dt = \frac{udx}{a}$, e fatta la sostituzione, si arriva alla espressione puramente algebraica $2zz + 3zu + uu = aa$, adunque averemo il valore di u dato algebraicamente per z, e le costanti. Ma $dt = \frac{udx}{a} = \frac{xdz}{a}$, quindi $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{u}$, nella quale equazione essendo u data per z, sono separate le variabili. Descritte adunque le curve, delle quali le assisse essendo z, le ordinate sieno reciprocamente proporzionali ai valori di u, averemo la x, ed indi la y, per la sostituzione fatta di $y = \frac{xz}{a}$.

16. Di questa equazione però, che ô presa per esempio, siccome d'altre ancora succede, che senza servirsi di questo metodo, si possano ridurre facilmente al

al metodo del num. 14. Ed in fatti, se all'uno, ed all'altro membro della suddetta equazione $xxdy^2 + xydxdy = xxdx^2$ aggiungasi il quadrato $\frac{1}{4}yydx^2$, essa sarà $xxdy^2 + xydxdy + \frac{yydx^2}{4} = xxdx^2 + \frac{yydx^2}{4}$, e cavando la radice, $xdy + \frac{1}{2}ydx = dx\sqrt{xx + \frac{yy}{4}}$, ed eccola ridotta al suddetto metodo generale del num. 14. O pure trasponendo il termine $xydxdy$, ed aggiungendo il quadrato $\frac{1}{4}yydy^2$, onde sia $xxdy^2 + \frac{1}{4}yydy^2 = xxdx^2 - xydxdy + \frac{1}{4}yydy^2$, ed estraendo la radice, $dy\sqrt{xx + \frac{1}{4}yy} = xdx - \frac{ydy}{2}$, ridotta allo stesso metodo.

17. Le equazioni, che contengono differenziali fra loro misti, ed elevati a potestà qualunque, non solo possono costruirsi nel caso considerato al num. 15., che suppone eguale la somma degli esponenti delle variabili in ciascun termine; ma generalmente in qualunque modo sieno esse equazioni, purchè l'una delle due indeterminate x, o y manchi. Ciò si farà ponendo $dx = \frac{zdy}{a}$, se manca la x; o $dy = \frac{zdx}{a}$, se manca la y, essendo la z una nuova indeterminata, ed a una costante qualun-

que. Imperciocchè con tale sostituzione, per esempio, di $\frac{zdy}{a}$ in luogo di dx nella proposta equazione, è manifesto, che ne nascerà un' altra, la quale sarà divisibile per la potestà della dy per modo, che si troverà composta di sole quantità finite, e però si averà la z data per la sola y, e le costanti, e la relazione della y alla z sarà espressa da un' equazione, o sia curva algebraica. Nella equazione adunque $dx = \frac{zdy}{a}$ posto in luogo di dy il valore, che si ricaverà da tale equazione algebraica, si averanno separate le variabili.

ESEMPIO I.

Sia l' equazione $ydy^3 dx = adx^4 + 2adx^2 dy^2 + ady^4$. Pongo $dx = \frac{zdy}{a}$; fatte le sostituzioni in luogo di dx, e sue potestà, averemo l' equazione $\frac{zydy^4}{a} = \frac{z^4 dy^4}{a^3} + \frac{2zzdy^4}{a} + ady^4$, e dividendo per dy^4, sarà $\frac{zy}{a} = \frac{z^4}{a^3} + \frac{2zz}{a} + a$, e però $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, e $dy = \frac{3zzdz}{aa} + 2dz - \frac{aadz}{zz}$, adunque $\frac{zdy}{a} = dx = \frac{3z^3 dz}{a^3} + \frac{2zdz}{a} - \frac{adz}{z}$.

Si

Si faccia paſſaggio all'integrazioni, ſarà dunque $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - lz$, preſo il logaritmo nella logaritmica della ſottangente a. Quindi ſi ânno i valori delle due coordinate x, y della equazione differenziale propoſta per mezzo di due curve, che ânno la comune indeterminata z. Per avere la coſtruzione ſi proceda così.

Nell'aſſe QE (*Fig.* 1.) preſe le aſſiſſe, ſi deſcriva la curva DAH dell'equazione $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, e la curva RIK dell' equazione $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - lz$, ſaranno le $EH = y$, $EK = x$ le coordinate della propoſta curva differenziale, per la coſtruzione della quale, fatta CM parallela ad EK, ſi produca KM in N, onde ſia ſempre $MN = EH$; e la curva NBN ſarà la ricercata.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $y^3 dx^5 + aaydydx^4 = a^3 dy^5$. Pongo $dx = \frac{zdy}{a}$; fatte le ſoſtituzioni, averemo $\frac{z^5 y^3 dy^5}{a^5} + \frac{aaz^4 ydy^5}{a^4} = a^3 dy^5$, e dividendo per dy^5, $z^5 y^3 + a^3 z^4 y = a^8$; ſarà adunque la z data per la ſola y, e le coſtanti,

ti, e però nell'equazione $dx = \frac{zdy}{a}$ faranno feparate le variabili.

Per avere la curva della propofta equazione differenziale. All'affe CE, (*Fig.* 2.) fi defcriva la curva IK dell'equazione $z^5y^3 + a^3z^4y = a^8$, effendo le $CM = y$, $MK = z$; in KM prodotta fi prenda MN eguale allo fpazio $CMKI$ divifo per a, farà $MN = \int \frac{zdy}{a} = x$, ed il punto N in curva.

18. Si può rendere più generale il metodo del num. 14. col trasformare le equazioni, che non ânno la condizione delle fomme eguali degl' efponenti, in altre, che abbiano effe fomme eguali, e fiano in confeguenza foggette al canone di effo numero. Ciò in due maniere fi può fare. L' una farà di fervirfi di congrue foftituzioni, delle quali però non v' è regola alcuna, ed i foli efempj poffono farcene acquiftare l' induftria; L' altra alterando gli efponenti della propofta formola, o equazione a fine di determinare almeno, in quali cafi, e con quale foftituzione poffa riufcire di trasformarla in una equivalente, in cui fi verifichi la condizione prefcritta; così fe non fi potranno generalmente feparare le variabili, fi determineranno infiniti cafi, ne' quali la feparazione fuccede.

ESEM-

ESEMPIO I.

E quanto alla prima maniera: sia l'equazione $dx\sqrt{aaxx + az^3} = zzdz$, che non â la necessaria condizione. Faccio $z^3 = ayy$, e differenziando $zzdz = \frac{2aydy}{3}$; e però, fatte le sostituzioni, $dx\sqrt{aaxx + aayy} = \frac{2aydy}{3}$, espressione, che può trattarsi col metodo del num. 14. Si può avere l'intento anche ponendo $\sqrt{aaxx + az^3} = au$, e però $aaxx + az^3 = aauu$, e differenziando, $2aaxdx + 3azzdz = 2aaudu$, cioè $zzdz = \frac{2audu - 2axdx}{3}$, e fatte le sostituzioni, $udx = \frac{2udu - 2xdx}{3}$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $x^3dx + \frac{xxdy}{\sqrt{a+y}} = dy$. Faccio $\sqrt{a+y} = z$, e però $a+y = zz$, e $dy = 2zdz$, e sostituendo, $x^3dx + 2xxdz = 2zdz$. Ma questa ricerca in oltre un' altra piccola riduzione; pongo per tanto $xx = u$, e però $x^4 = uu$,

e

e $4x^3 dx = 2udu$, quindi surrogati i valori, sarà finalmente $\frac{udu}{2} + 2udz = 2zdz$, il che ec.

19. Passo alla seconda maniera con alterare gli esponenti, e però prendo l' equazione generale di tre termini $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$, in cui i segni possono essere, comunque si vuole, positivi, o negativi. Se fosse $n + m = q + p = r + s$, sarebbe il caso del num. 14.; ma supposto, che fra le somme degli esponenti non vi sia questa eguaglianza, si ponga $y = z^t$, onde $dy = tz^{t-1} dz$, $y^s = z^{st}$, $y^q = z^{tq}$, $y^n = z^{nt}$, e fatte le debite sostituzioni nella proposta equazione, sarà $az^{nt} x^m dx + bz^{qt} x^p dx + tcx^r z^{st+t-1} dz = 0$. Ma per la condizione del suddetto num. 14. fa di mestieri, che sia $nt + m = qt + p = r + st + t - 1$; dalla prima equazione adunque $nt + m = qt + p$ caverassi il valore dell' esponente assunto $t = \frac{p - m}{n - q}$, il quale sostituito nella seconda $qt + p = r + st + t - 1$, o sia $\overline{s - q + 1} \times t = p - r + 1$, ci darà $\overline{s - q + 1} \times \overline{p - m} = \overline{p - r + 1} \times \overline{n - q}$, che è la condizione, che devono avere gli esponenti della proposta equazione, verificandosi la quale, sarà sempre riducibile al canone del num. 14., e la sostituzione da farsi sarà $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$.

Se

Se in luogo di porre $y = z^t$ aveſſi poſto $x = z^t$, averei trovata la medeſima condizione da verificarſi negli eſponenti, ma ſarebbe $t = \frac{n - q}{p - m}$, e però la ſoſtituzione da farſi $x = z^{\frac{n-q}{p-m}}$.

Può darſi, che la ſoſtituzione $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$ divenga impoſſibile, cioè quando ſia $p = m$, o $n = q$; ma ſi avverta, che in queſti caſi le indeterminate ſono ſeparabili ſenza biſogno di riduzione.

Nella equazione canonica $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$, ſe oltre la ſuppoſizione di $y = z^t$, ſi porrà ancora $x = u^i$, fatte tutte le ſoſtituzioni, ſi troverà l' equazione $aiz^{nt} u^{im + i - 1} du + biz^{qt} u^{ip + i - 1} du + ctu^{ir} z^{st + t - 1} dz = 0$; dal paragone degli eſponenti del primo, e ſecondo termine caveraſſi $nt + im + i - 1 = qt + ip + i - 1$, cioè $t = i \times \frac{\overline{p - m}}{n - q}$; dal paragone di queſti del ſecondo, e terzo ſi troverà $ir + st + t - 1 = qt + ip + i - 1$, o ſia $t \times \overline{s - q + 1} = i \times \overline{p - r + 1}$, e poſto in luogo di t il ſuo valore, $i \times \overline{p - m} \times \overline{s - q + 1} = i \times \overline{n - q} \times \overline{p - r + 1}$, che è la condizione, che devono avere gli eſponenti dell' equazione propoſta; ma la lettera i ſpariſce dalla condizione, dunque è ſtata affatto ſuperflua la ſeconda ſoſtituzione di $x = u^i$, dal

che

che s'inferisce, che tutte le formole al canone del num. 14. non possono ridursi generalmente, ma solo quelle, in cui si verifichi la condizione $\overline{p-m} \times \overline{s-q+1} = \overline{n-q} \times \overline{p-r+1}$. Istessamente si discorra dell'altre, che quanto prima maneggierò, composte di maggior numero di termini.

20. Crescendo il numero de' termini oltre il tre, cresce istessamente il numero delle condizioni, che devono avere gli esponenti delle equazioni, acciò sieno riducibili al metodo del num. 14. Prendo l'equazione canonica di quattro termini $ax^m y^n dx + bx^p y^q dx + cx^r y^s dy + fx^e y^u dy$. Posta $y = z^t$, $dy = tz^{t-1}dz$, e fatte le sostituzioni, sarà $az^{nt}x^m dx + bz^{qt}x^p dx + tcx^r z^{st+t-1}dz + ftx^e z^{tu+t-1}dz$. Deve adunque essere $nt + m = qt + p$, onde si caverà il valore dell'esponente assunto $t = \frac{p-m}{n-q}$. Deve essere pure $r + st + t - 1 = qt + p$, o sia $st - qt + t = p - r + 1$, e posto il valore di t, sarà $\overline{s-q+1} \times \overline{p-m} = \overline{p-r+1} \times \overline{n-q}$, prima condizione. Ma in oltre deve essere $e + tu + t - 1 = qt + p$, o sia $tu - qt + t = p - e + 1$, e posto il valore di t, $\overline{u-q+1} \times \overline{p-m} = \overline{p-e+1} \times \overline{n-q}$, seconda condizione. Se adunque gli esponenti d'una proposta equazione saranno tali, che ambe le ritrovate condizioni si verifichino, sarà essa riducibile al caso del

num.

num. 14., e la sostituzione da farsi sarà $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$.

Se le equazioni avranno cinque termini, le condizioni da verificarsi saranno tre, e così si vada discorrendo.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $ay^3 xdx + byyx^{\frac{1}{2}} dx = cxdy$. Paragonata questa con la canonica, sarà $n = 3$, $m = 1$, $q = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $r = 1$, $s = 0$; e perchè nel presente caso si verifica la condizione $\overline{s - q + 1} \times \overline{p - m} = \overline{p - r + 1} \times \overline{n - q}$, dandoci $-1 \times -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1$, che è una verità, sarà riducibile al metodo del num. 14. l'equazione, e la sostituzione da farsi sarà $y = z^{\frac{p-m}{n-q}} = z^{-\frac{1}{2}}$. Pongo adunque $y = z^{-\frac{1}{2}}$, $dy = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$, $y^3 = z^{-\frac{3}{2}}$, $yy = z^{-1}$, e fatte le sostituzioni, trovo $az^{-\frac{3}{2}} xdx + bz^{-1} x^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2} cxz^{-\frac{3}{2}} dz$, ed eccola ridotta al caso del suddetto numero.

21. Ma senza rapportare le particolari equazioni alle canoniche, tornerà forse più comodo il maneggiarle sole collo stesso metodo.

ESEMPIO I.

Sia adunque l'equazione $ay^{\frac{1}{3}} x^{\frac{11}{6}} dx - \frac{bx^3 dy}{y} = cxxydy$. Pongo $x = z^t$, $dx = tz^{t-1}dz$; fatte le sostituzioni, sarà $tay^{\frac{1}{3}} z^{\frac{11t+t-1}{6}} dz - bz^{3t}y^{-1}dy = cz^{2t}ydy$, ma deve essere $\frac{1}{3} + \frac{11t+t-1}{6} = 3t-1$, quindi ricavo $t = 2$, il qual valore posto in luogo di t mi dà l'equazione $2ay^{\frac{1}{3}} z^{\frac{14}{3}} dz - bz^6 y^{-1} dy = cz^4 ydy$, che è appunto il caso del num. 14. La sostituzione da farsi è adunque $x = zz$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $x^{\frac{1}{2}} dx + y^{\frac{4}{3}} dx + x^{\frac{3}{4}} ydy = y^3 dy$. Pongo $y = z^t$, e $dy = tz^{t-1}dz$, fatte le sostituzioni, sarà $x^{\frac{1}{2}} dx + z^{\frac{4t}{3}} dx + tx^{\frac{3}{4}} z^{t+t-1} dz = tz^{3t+t-1} dz$. Ma deve essere $\frac{1}{2} = \frac{4t}{3}$, quindi ricavo $t = \frac{3}{8}$, il qual

valo-

valore posto in luogo di t mi dà l'equazione

$x^{\frac{1}{2}} dx + z^{\frac{1}{2}} dx + \frac{3}{8} x^{\frac{3}{4}} z^{\frac{3}{4} - 1} dz = \frac{3}{8} z^{\frac{1}{2}} dz$, che appunto è il caso del numero 14. La sostituzione da farsi è adunque $y = z^{\frac{3}{8}}$.

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $ayyxxdx + bdx + cyxdx + fx^4 yydy = 0$. Pongo $y = z^t$, $dy = tz^{t-1} dz$; fatte le sostituzioni, sarà $az^{2t} xxdx + bdx + cz^t xdx + tfx^4 z^{2t+t-1} dz = 0$. Ma deve essere $2t + 2 = t + 1$, quindi ricavo $t = -1$, il qual valore posto in luogo di t mi dà l'equazione $\frac{axxdx}{zz} + bdx + \frac{cxdx}{z} - \frac{fx^4 dz}{z^4} = 0$, che è appunto il caso del num. 14. La sostituzione da farsi è adunque $y = \frac{1}{z}$.

22. Reso più generale il metodo del num. 14., passo ad un' altro, che è pure generale nel suo genere. Comprende questo tutte quelle equazioni, nelle quali nè le indeterminate, nè i loro differenziali oltrepassano la prima dimensione.

Sia per tanto l'equazione differenziale generale, che abbraccia tutti i casi possibili, ne' quali le variabili, e loro

 dif-

differenziali non ascendono oltre la prima dimensione $axdx + bydy + cydx + gxdy + fdx + hdy = 0$. I coefficienti a, b ec. possono essere affermativi, o negativi, ed anche zero, conforme portano le circostanze dell'equazione particolare, che si vuole costruire. Intorno a questa equazione osservo in primo luogo, che se sarà $c = g$, essendo c, e g ambe positive, o ambe negative, l'equazione potrà integrarsi; imperciocchè sarà $\pm c \times \overline{ydx + xdy} = - axdx - bydy - fdx - hdy$, ed integrando, $\pm cxy = - \frac{axx}{2} - \frac{byy}{2} - fx - hy$. Ma non essendo $c = g$, faccio $x = p + A$, $y = q + B$; le p, e q sono due nuove indeterminate, e le A, B due costanti arbitrarie da fissarsi nel progresso. Sarà dunque $dx = dp$, $dy = dq$, $xdx = pdp + Adp$, $ydy = qdq + Bdq$. Collocati questi valori nella equazione principale proposta, nascerà la seguente

$$\begin{array}{llll} apdp + aAdp + bqdq + bBdq + cqdp + gpdq & & & \\ \quad + cBdp & + gAdq & & = 0. \\ \quad + fdp & + hdq & & \end{array}$$

Se in questa equazione svanissero i termini secondo, e quarto, sarebbe essa il caso del num. 14., e si saprebbero separare le indeterminate, ma svanirà il secondo termine se sia $aA + CB + f = 0$, ed il quarto se sia $bB + gA + h = 0$; quindi da queste due equazioni si determinano i valori dell'assunte A, B, talchè la nuova

equa-

equazione ſia il caſo del ſuddetto num. 14. Sarà per tanto $A = \frac{-cB-f}{a}$, $B = \frac{-gA-h}{b}$, cioè $A = \frac{bf-ch}{cg-ab}$, e $B = \frac{ah-fg}{cg-ab}$. Se adunque ſi faranno le ſoſtituzioni $x = p + \frac{bf-ch}{cg-ab}$, $y = q + \frac{ah-fg}{cg-ab}$, naſcerà un' equazione da maneggiarſi col metodo del num. 14.

Se in una particolar equazione ſuccedeſſe, che foſſe $bf = ch$, ovvero $ah = fg$ di modo, che o l' una, o l'altra delle coſtanti aſſunte foſſe zero, ſarebbe indizio, poterſi ottenere l' intento con una ſola ſoſtituzione. Sia per cagion d' eſempio $\frac{bf-ch}{cg-ab} = A = 0$; in tal caſo, laſciata la quantità x colle ſue differenze, baſterà in luogo di y ſoſtituire $q + B$, e proſeguire a norma di quanto è ſtato detto di ſopra.

Che ſe foſſero nulle ambe le grandezze A, B, in sì fatta ipoteſi averebbeſi $bf = ch$, $ah = fg$, ed in conſeguenza $\frac{ch}{b} = \frac{ah}{g} = f$; dunque $cg = ab$, con che non ânno più luogo le ſoſtituzioni praticate. Ogni qual volta adunque ſia $cg = ab$, ſi faccia la ſoſtituzione $ax + cy = z$, e ſi tolga dall' equazione la y, e dy. Sarà adunque $y = \frac{z-ax}{c}$, $dy = \frac{dz-adx}{c}$; fatte le ſoſtituzioni nella

equa-

equazione principale, si avrà $axdx + \frac{bzdz - abxdz - abzdx + aabxdx}{cc} + zdx - axdx + \frac{gxdz - agxdx}{c} + fdx + \frac{hdz - ahdx}{c} = 0$, cioè elidendo il primo termine col settimo, e riducendo al comun denominatore, $bzdz - abxdz - abzdx + aabxdx + cczdx + cgxdz - acgxdx + ccfdx + chdz - achdx = 0$; ma poichè $cg = ab$, il secondo termine elide il sesto, ed il quarto il settimo, onde rimane $bzdz - abzdx + cczdx + ccfdx + chdz = achdx$, cioè $\frac{bzdz + chdz}{abz - ccz - ccf + ach} = dx$

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $axdx + 2aydx + bxdy - abdy = 0$. Faccio $x = p + A$, $y = q + B$, $dx = dp$, $dy = dq$; fatte le sostituzioni, l' equazione sarà

$$\begin{aligned} apdp + aAdp + 2aqdp + bpdq + bAdq &= 0, \\ + 2aBdp \qquad\qquad\qquad - abdq & \end{aligned}$$

L' ultimo termine svanirà, se sia $bA - ab = 0$, cioè $A = a$; svanirà il secondo, se sia $2AB + aA = 0$, cioè $B = -\frac{a}{2}$, le sostituzioni sono adunque $x = p + a$, $y = q - \frac{1}{2}a$, e l' equazione si riduce al caso del num. 14.

Sva-

Svaniti i ſuddetti termini nell' equazione, ſi può eſſa integrare per mezzo del num. 4. ſenza ſervirſi del num. 14.

ESEMPIO II.

Sia l' equazione $2axdx - 2bydy - 4aydx + bxdy - aadx = 0$. In queſta il coefficiente $2a$ corriſponde ad a della canonica, $-2b$ alla b, $-4a$ alla c, b alla g, e ſi dà il caſo, che ſia $cg = ab$ riſpetto alle coſtanti della canonica; faccio adunque la ſoſtituzione $2ax - 4ay = z$, e però $y = \frac{2ax - z}{4a}$, $dy = \frac{2adx - dz}{4a}$; quindi eliminate le y, e dy, averemo $2axdx - \frac{8aabxdx + 4abzdx + 4abxdz - 2bzdz}{16aa} - 2axdx + zdx + \frac{2abxdx - bxdz}{4a} - aadx = 0$, cioè $4abzdx - 2bzdz + 16aazdx - 16a^4dx = 0$, e però $dx = \frac{2bzdz}{4abz + 16aaz - 16a^4}$.

23. Sì le notate equazioni, come quelle ancora di grado ſuperiore, poſſono maneggiarſi per mezzo di una ſola, ma più compoſta ſoſtituzione. Ripiglio l' equazione canonica di ſopra $axdx + bydy + cydx + gxdy + fdx + hdy = 0$, perchè quelle di grado ſuperiore portano a calcoli troppo longhi, e ciò, che dirò intorno a queſta; ba-

basterà per far vedere, come debbano quelle trattarsi. Pongo adunque $x = Ay + p + B$, nella quale equazione sussidiaria la p è una nuova indeterminata, a cui non si prefigge costante alcuna, perchè sarebbe superflua, come si può conoscere, facendo l'operazione; le A, B sono due costanti da fissarsi nel progresso. Posta adunque $x = Ay + p + B$, sarà $dx = Ady + dp$, $xdx = AAydy + Apdy + ABdy + Aydp + pdp + Bdp$, quindi surrogati questi valori nell' equazione canonica, sarà essa trasformata nella seguente

$$\begin{array}{llllll} aAAydy & + aApdy & + aAydp & + apdp & + aABdy & + aBdp \\ \quad bydy & + gpdy & + cydp & & + gBdy & + fdp = 0. \\ cAydy & & & & + fAdy & \\ gAydy & & & & + hdy & \end{array}$$

Conviene adunque procurare di fare svanire alcuni termini di questa equazione, fissando opportunamente le arbitrarie assunte A, B, e con ciò renderla capace del fine, che si pretende; quando però si verifichino alcune condizioni, che nascono da' valori delle A, B. Se adunque mancassero i due termini secondo, e terzo, sarebbero separate le variabili, ed integrabile l' equazione. Ma acciò sieno nulli essi due termini, bisogna, che sia $aA + g = 0$ rispetto al secondo, ed $aA + c = 0$ rispetto al terzo, ed in conseguenza $g = c$; ma posto ciò, l' equazione principale era già integrabile senza l' ajuto d' alcuna operazione.

Se

Se fossero nulli i due ultimi termini, l'equazione sarebbe ridotta al canone del num. 14., ma acciò essi sparisca-no, convien, che sia $aB + f = o$ rispetto all' ultimo, cioe $B = -\frac{f}{a}$, ed $aAB + gB + fA + h = o$ rispetto al quinto, ma surrogato il valore di B, sarà $- Af - \frac{gf}{a} + Af + h = o$, cioè $ah = gf$. Non possono adunque sparire gli ultimi due termini, e così per essi ridursi l'equazione, se non nel caso particolare, che si verifichi la condizione $ah = gf$.

Si procuri adunque di togliere il primo, e quinto termine, con che l' equazione sarà ridotta al caso de' numeri 4., e 6. Adunque sarà rispetto al primo termine $aAA + b + cA + gA = o$, cioè $AA + \frac{cA + gA}{a} = -\frac{b}{a}$, da cui si ricaverà il valore dell' assunta A; trovato questo, scopriranssi quello di B dal quinto termine, e sarà $B = -\frac{fA - h}{aA + g}$, e la nuova equazione verrà ad essere $\overline{aA + g} \times pdy + \overline{aA + c} \times ydp = -apdp - aBdp - fdp$, che si costruirà per mezzo del num. 4., se i coefficienti de' due primi termini saranno ambi positivi, o negativi; e per mezzo del num. 6., se uno sia positivo, negativo l' altro.

Ma per ottenere la bramata ſeparazione, baſterà far ſvanire il primo termine dall' equazione ſuſſidiaria, ponendo $aAA+cA+gA+b=0$, mentre poſta $=0$ la coſtante aſſunta B, che in queſto caſo rieſce ſuperflua, reſterà l' equazione $-apdp-fdp=\overline{aA+g}\times pdy+\overline{fA+b}\times dy+\overline{aA+c}\times ydp$, nella quale ſi ſeparano le variabili col metodo, che prenderò a ſpiegare nel numero, che ſiegue; o pure con l' antecedente per mezzo di una facile preparazione, cioè facendo $\overline{Aa+g}\times p+fA+b=q$, e differenziando $\overline{Aa+g}\times dp=dq$; dunque ſoſtituendo, $-apdp-fdp=qdy+\frac{\overline{Aa+c}\times ydq}{Aa+g}$. Si dee però riflettere, che nel fare uſo di queſte formole bene ſpeſſo s' inſinuano le quantità immaginarie naſcenti dalla equazione quadratica affetta dal lato $aAA+cA+gA+b=0$; ed eſſe non ſolo ſi rinvengono nelle grandezze coefficienti, ma paſſano talvolta negli eſponenti; e perchè ſin ora non ſi ſanno maneggiare, fa d' uopo evitarle, e fra varj metodi valerſi di quello, che più cade in acconcio.

ESEM-

ESEMPIO.

Sia l'equazione $abxxdx + bbyxdx + a^3ydx + aabydy + a^3xdy = 0$. Pongo $y = Ax + p + B$ (sostituisco in luogo della y piuttosto, che della x, perchè preveggo il calcolo più breve) adunque $dy = Adx + dp$. Fatte pertanto le sostituzioni, averassi l'equazione

$$\begin{array}{l} abxxdx + bbpxdx + bbBxdx + a^3pdx + a^3Bdx + aabAxdp + aabpdp + aabBdp \\ bbAxxdx \quad + 2a^3Axdx + aabApdx + aabABdx + a^3xdp \quad = 0. \\ \quad + aabAAxdx \end{array}$$

Osservo, che se in questa equazione sparissero i termini 1, 3, 5, e 6., avrebbonsi le indeterminate separabili, perchè sarebbe

$$\begin{array}{l} bbpxdx + a^3pdx + aabpdp + aabBdp = 0, \\ \quad + aabApdx \end{array}$$

e dividendo per p,

$bbxdx + a^3dx + aabAdx = - aabdp - \frac{aabBdp}{p}$. Acciò adunque sparisca il primo, bisogna, che sia $a + bA = 0$, cioè $A = -\frac{a}{b}$, e con ciò spariscono pure il quinto, e sesto senza, che nasca condizione alcuna. Acciò sparisca il terzo, conviene, che sia $bbB + 2a^3A + aabAA = 0$, e surrogato il valore di A, $bbB - \frac{2a^4}{b} + \frac{a^4b}{bb} = 0$, cioè

$B = \frac{a^4}{b^3}$. La fostituzione adunque farà $y = -\frac{ax}{b} + p + \frac{a^4}{b^3}$, e l'equazione, che indi nafce, $bbxdx = -aabdp - \frac{a^6 dp}{bbp}$,

24. Confifte il metodo di quefto nnmero nel difporre primieramente l'equazione propofta in maniera, che le quantità differenziali reftino accompagnate rifpettivamente dalle loro indeterminate, e fi faccia, per così dire, una dimezzata feparazione, rigettando ne' comuni moltiplicatori, o divifori quelle grandezze, che turbano l'operazione; indi prefa la fommatoria della differenziale così preparata compofta di due incognite, fi deve porre eguale ad una variabile affunta, e col mezzo d'una equazione aufiliaria dare una nuova forma alla principale. Finalmente fatta offervazione a ciò, che fuccede, deve rinnovarfi l'operazione fino a tanto, che fi confeguifca la bramata feparazione, o fi vegga effere la formola fuperiore alla noftra induftria.

'A di vantaggio quefto metodo fopra degli altri, che valendofi noi delle foftituzioni, nel tempo fteffo ci infegna, quali fieno le legitime, e quali le inutili. Si offervi però, effervi delle equazioni, che non ammettono l'artificio del prefente metodo, fe prima non vengano con qualche induftria preparate. Il tutto s'intenderà meglio dagli efempj.

ESEM-

ESEMPIO I.

Ci venga proposta l'equazione

$$\frac{x^3 dy + y^3 dx}{\overline{xx + yy} \sqrt{xx + yy - xxyy}} = dz$$, nella quale la dz è una funzione qualunque di x, ovvero di y. Metto da parte la quantità $\overline{xx + yy} \sqrt{xx + yy - xxyy}$, che è una affezione cumune a due termini, che compongono la prima parte dell'equazione, resterà la differenziale nuda $x^3 dy + y^3 dx$. Divido dx per x^3, dy per y^3, e però sarà $x^3 dy + y^3 dx = x^3 y^3 \times \overline{\frac{dy}{y^3} + \frac{dx}{x^3}}$, onde la proposta equazione prenderà il nuovo aspetto

$$\frac{x^3 y^3}{\overline{xx + yy} \sqrt{xx + yy - xxyy}} \times \overline{\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3}} = dz .$$ Ottenuta questa dimezzata separazione, in cui le flussioni dx, dy vengono combinate semplicemente colle funzioni delle loro fluenti, o sia variabili x^3, y^3, e gli altri termini costituiscono una quantità quasi estranea, che fa figura di moltiplicatore; pongo $\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3} = -\frac{dp}{a^3}$, e però integrando $\frac{a^3}{2xx} + \frac{a^3}{2yy} = p$, quindi ritrovato il valore, per esempio di $x = \frac{y}{\sqrt{2yyp - a^3}}$,

e

e fostituito questo in luogo di x, e $-\frac{dp}{a^3}$ in luogo di $\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3}$ nell'equazione, sarà essa $-\frac{dp \times a\sqrt{a}}{2p\sqrt{2p - a^3}} = dz$, il che ec.

Raccolgasi, che presa ad arbitrio una quantità in qualsivoglia modo data per p, come $p = \frac{a}{2qq}$, sarà $\frac{a}{2qq} = \frac{a}{2xx} + \frac{a}{2yy}$, cioè $q = \frac{xy}{\sqrt{xx+yy}}$, con che in un batter d' occhio si scoprono le infinite sostituzioni, che servono alla bramata separazione. Tutte le altre possibili sono inutili, e lasciano le variabili più di prima confuse.

Si noti di più, che colle spiegate sostituzioni spesse volte accade, che in un membro dell' equazione ci resti qualche funzione dell' una, o dell' altra variabile x, o pure y; nel qual caso se la dz fosse data per la variabile, di cui resta la funzione, una semplice divisione supplirebbe al bisogno.

ESEMPIO II.

Sia l' equazione $\frac{2ydy + xdy + ydx}{a + x + y} = dz$, in cui la dz sia data in qualsivoglia modo per y. Per ridurre al metodo

todo questa equazione, prendo l' integrale del numeratore della frazione, cioè $yy + xy$, e lo pongo $= p$, quindi fatta svanire dall' equazione la x, e dx, collocandovi il suo valore, ô la nuova equazione $\frac{dp}{a + \frac{p}{y}} = dz$, che si riduce alla seguente $ydp - pdz = aydz$; e questa preparata secondo il metodo, si trova essere $p \times \overline{\frac{dp}{p} - \frac{dz}{y}} = adz$.

Faccio $\frac{dp}{p} - \frac{dz}{y} = \frac{dq}{q}$, e però $lp - \int \frac{dz}{y} = lq$; pongo in oltre $\int \frac{dz}{y} = ulm$, (lm è un logaritmo costante) sarà $lp - lq = ulm$, e passando dalle quantità logaritmiche alle esponenziali, $\frac{p}{q} = m^u$. Fatte adunque nell' equazione ridotta le sostituzioni di $\frac{dq}{q}$ in luogo di $\frac{dp}{p} - \frac{dz}{y}$, e di $m^u q$ in luogo di p, sarà $m^u dq = adz$, cioè $dq = \frac{adz}{m^u}$, in cui sono separate le variabili, per essere tanto dz, quanto m^u date per y, il che ec.

ESEM-

ESEMPIO III.

Sia l' equazione $\frac{2xxdx + xydy + yydx}{x^4 + xxyy + a^4} = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}$.

Prima di tentare questa formola sarà bene ridurla. Osservo, che il secondo membro è integrabile, e la sua sommatoria è $\sqrt{xx + yy}$. (num. 10.) Pongo per tanto $\sqrt{xx + yy} = z$, e fatta svanire la y, atteso che le sue funzioni montano al quadrato, collocando $zz - xx$ in luogo di yy, e $zdz - xdx$ in luogo di ydy, averemo l' equazione $\frac{2xxdx + xzdz - xxdx + zzdx - xxdx}{xxzz + a^4} = dz$, cioè $\frac{xzdz + zzdx}{xxzz + a^4} = dz$, la quale preparata al solito sarà $\frac{z}{xxzz + a^4} \times \overline{xdz + zdx} = dz$. Faccio $xdz + zdx = dp$, ed integrando $xz = p$, e fatta svanire la x, averemo $\frac{zdp}{pp + aa} = dz$, e finalmente $\frac{dp}{pp + aa} = \frac{dz}{z}$, il che ec.

ESEM-

ESEMPIO IV.

Sia l' equazione ultima dell' antecedente numero $-apdp-fdp=\overline{aA+g}\times pdy+\overline{fA+h}\times dy+\overline{aA+c}\times ydp$, che ô promesso di costruire. Preparata questa secondo il metodo, e fatto per brevità $aA+g=e$, $fA+h=m$, $aA+c=n$, si riduce ad essere

$-\frac{apdp-fdp}{ep+m}=y\times\overline{\frac{dy}{y}+\frac{ndp}{ep+m}}$. Pongo adunque $\frac{dy}{y}+\frac{ndp}{ep+m}=\frac{dq}{q}$, ed integrando $ly+\frac{n}{e}\,l\overline{p+\frac{m}{e}}=lq$, e però $y=\frac{q}{\overline{p+\frac{m}{e}}^{\frac{n}{e}}}$, e fatta svanire la y, averassi

$$-\frac{apdy-fdp}{ep+m}=\frac{dq}{\overline{p+\frac{m}{e}}^{\frac{n}{e}}},\text{ cioè }-\overline{\frac{apdp-fdp}{ep+m}}\times\overline{p+\frac{m}{e}}^{\frac{n}{e}}=dq,$$

il che ec.

ESEMPIO V.

Sia l'equazione già preparata $y^m \times \overline{xdx + ydy} = x^n \times \overline{ydx - xdy}$, che ſcrivo così $\frac{y^{m-2}}{x^n} \times \overline{xdx + ydy} = \frac{ydx - xdy}{yy}$, a fine di rendere integrabile il ſecondo membro. In queſta farò uſo d'una doppia ſoſtituzione, e però pongo $xdx + ydy = pdp$, ed integrando, $xx + yy = pp$; pongo in oltre $\frac{ydx - xdy}{yy} = dq$, ed integrando $\frac{x}{y} = q$. Fatte le ſoſtituzioni, averaſſi $\frac{y^{m-2}}{x^n} \times pdp = dq$; ma $yy = pp - xx$, ed $xx = qqyy$, adunque ſarà $yy = pp - qqyy$, cioè $yy = \frac{pp}{aa + qq}$, ed $y^{m-2} = \frac{p^{m-2}}{\overline{aa + qq}^{\frac{m-2}{2}}}$, $x^n = \frac{q^n p^n}{\overline{aa + qq}^{\frac{n}{2}}}$; ſoſtituiti per tanto queſti valori di y^{m-2}, e di x^n, averaſſi $p^{m-n-1} dp = q^n dq \times \overline{aa + qq}^{\frac{m-n-2}{2}}$, il che ec.

ESEM-

ESEMPIO VI.

Sia l'equazione $\frac{2xdy - 2ydx}{\overline{x-y}^{2}} = dz$, in cui dz è data in qualsivoglia modo per x, o per y. Osservo, che il numeratore del primo membro $2xdy - 2ydx$ è integrabile quando si divida per xx, ed il suo integrale è $\frac{2y}{x}$, e però dispongo l'equazione così

$\frac{1}{\overline{x-y}^{2}} \times \frac{2xdy - 2ydx}{xx} = \frac{dz}{xx}$; pongo $\frac{2y}{x} = p$, onde sarà $\frac{2xdy - 2ydx}{xx} = dp$, e l'equazione si muterà nella seguente $\frac{dp}{\overline{x-y}^{2}} = \frac{dz}{xx}$; ma $2y = px$, ed $yy = \frac{ppxx}{4}$, dunque fatte le sostituzioni, $\frac{dp}{xx - pxx + \frac{ppxx}{4}} = \frac{dz}{xx}$, e moltiplicando per xx, $\frac{dp}{1 - p + \frac{pp}{4}} = dz$, in cui sono separate le variabili. Passo avanti all'integrazione, e

però farà $\frac{2}{1-\frac{p}{2}} + c = \int dz$; e posto il valore di p,

$\frac{2}{1-\frac{y}{x}} + c = \int dz$, e riducendo al comun denominatore, $\frac{2x + cx - cy}{x-y} = \int dz$. Posta la costante $c = 0$, avremo $\frac{2x}{x-y} = \int dz$; posta $c = -2$, sarà $\frac{2y}{x-y} = \int dz$, altro integrale della proposta formola diverso dal primo; posta finalmente $c = -1$, nascerà il terzo integrale $\frac{x+y}{x-y} = \int dz$.

25. Il metodo, che ora prendo a spiegare, quantunque molto limitato, è però di grande uso ne' casi particolari. Con questo si separano le variabili nell'equazione canonica $ady = ypdx + by^n qdx$, in cui le quantità p, q s'intendono date in qualunque modo per x; le a, b sono costanti, i segni possono essere positivi, e negativi a piacere, e l' esponente n può essere intiero, rotto, positivo, negativo, ed anco zero. Sia adunque l' equazione $ady = ypdx + by^n qdx$. Si faccia $y = zu$, (z, ed u sono due nuove variabili) e differenziando, $dy = zdu + udz$, e sostituendo in luogo di dy, di y, e di y^n i valori $zdu + udz$, uz, $u^n z^n$, averassi l'equazione $azdu + audz = uzpdx + bz^n u^n qdx$, nella quale se due termini sparissero, si

ſi ſeparerebbero le indeterminate. Per far ciò ſi finga un' equazione tra due termini $audz = uzpdx$, dunque $\frac{adz}{z} = pdx$, ed integrando, $alz = \int pdx$, e paſſando da' logaritmi alle quantità eſponenziali, $z^a = m^{\int pdx}$, o ſia $z = m^{\frac{\int pdx}{a}}$, ſuppoſta l'unità $= lm$. Queſt' ultima equazione mi moſtra il valore di z, e m' inſegna, che per ridurre l' equazione propoſta a due ſoli termini, e fare, che gl' altri due ſi diſtruggano, ſi doveva in vece di $y = zu$ porre $y = um^{\frac{\int pdx}{a}}$, cioè $\frac{ly}{u} = m^{\frac{\int pdx}{a}}$, o ſia $ly - lu = \int \frac{pdx}{a}$, e differenziando, $\frac{ady}{y} - \frac{adu}{u} = pdx$, e però $ady = ypdx + \frac{aydu}{u}$. Soſtituiſco adunque nell' equazione canonica $ady = ypdx + by^n qdx$ in luogo di dy il valore ritrovato, e ſarà $ypdx + \frac{aydu}{u} = ypdx + by^n qdx$, cioè $\frac{aydu}{u} = by^n qdx$, e però $\frac{adu}{u} = by^{n-1} qdx$; ma $y = zu$, ed $y^{n-1} = z^{n-1} u^{n-1}$, onde finalmente $\frac{adu}{u^n} = bz^{n-1} qdx$, equazione in cui ſono ſeparate le variabili, per eſſerſi trovata la z data per x. Quando ſiaſi giunto all' equazione $alz = \int pdx$, egli è certo, che ſe p data per

x

x ſarà tale, che l'integrale $\int pdx$ dipenda dalla quadratura dell'iperbola, o ſia da' logaritmi, e la quantità a ſia un numero qualunque, ſarà algebraica la relazione di z ad x, ed in ogni altro caſo traſcendente.

E qui ſi oſſervi, acciò una data equazione ſia il caſo della formola canonica, eſſere neceſſario, che ſi adempiano le ſeguenti condizioni, cioè che la differenza dy poſſa reſtar da ſe ſola, o al più moltiplicata per una coſtante in una parte dell'equazione; che nell'altra parte dell'equazione il primo termine contenga la differenza dx moltiplicata per qual ſi ſia funzione di x eſpreſſa per p, e per l'indeterminata y, che nell'altro termine la quantità qdx data per x venga moltiplicata per una dignità di y; in una parola, fatta la diviſione per y, ſi richiede, che da una parte dell'equazione reſti la fluſſione logaritmica $\frac{adv}{y}$, e nell'altra il primo termine ſia libero dall'indeterminata y, ed il ſecondo moltiplicato per la dignità y^{n-1}. Mancando l'uno de' premeſſi requiſiti, non â più luogo queſto metodo, come non lo avrebbe nelle ſeguenti equazioni $ady = yypdx + by^{n}qdx$, $ady = ypdx + \overline{ayy + y^{3}} \times qdx$.

Alcune formole però ſi riducono con tutta facilità al canone col ſolo prepararle. Per eſempio ſia l'equazione $ady = ypdx + byqdx + yyqdx$; fatta rifleſſione, che la

la quantità $pdx + bqdx$ viene moltiplicata per y, e che il binomio $p + bq$ è dato per x di maniera, che si può in sua vece surrogare la quantità r data ugualmente per x, l'espressione si muterà nella seguente $ady = yrdx + yyqdx$, in cui trova luogo il metodo spiegato, e ciò basterà per indicare il modo d'operare in simili casi.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $ady = \frac{fydx}{x} + yydx$. Pongo $y = zu$, e però $ady = azdu + audz$; e fatte le debite sostituzioni, averemo $azdu + audz = \frac{fuzdx}{x} + zzuudx$. Sia $audz = \frac{fuzdx}{x}$, cioè $\frac{adz}{z} = \frac{fdx}{x}$, integrando sarà $a\,l\,z = f\,l\,x$, e però $z^a = x^f$.

Se le costanti a, f saranno numeri razionali interi, rotti, affermativi, o negativi, la z sarà data algebraicamente per x. Sia per esempio $a = 1$, $f = 2$, così che sia $z = xx$. Dunque dileguandosi i termini $audz$, $\frac{fuzdx}{x}$, resteranno i due $azdu = zzuudx$, ma $z = xx$, dunque sarà $\frac{adu}{uu} = xxdx$, equazione, in cui sono separate le variabili.

Passan-

Paſſando all'integrazione, ſarà $-\frac{a}{u}+c=\frac{x^3}{3}$, ma $u=\frac{y}{z}=\frac{y}{xx}$, adunque $-\frac{axx}{y}+c=\frac{x^3}{3}$, cioè $3cy-3axx=x^3y$, che è l'equazione algebraica naſcoſta ſotto la differenziale propoſta.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $dy=\frac{aydx}{xx-aa}+\frac{y^3dx}{x^3}$. Faccio, come ſopra, $y=zu$, e $dy=zdu+udz$, e però fatte le ſoſtituzioni, averaſſi l'equazione $zdu+udz=\frac{azudx}{xx-aa}+\frac{z^3u^3dx}{x^3}$, e ſuppoſto $udz=\frac{azudx}{xx-aa}$, cioè $\frac{dz}{z}=\frac{adx}{xx-aa}$, cioè $z=m^{\int\frac{adx}{xx-aa}}$, averaſſi l'equazione $zdu=\frac{z^3u^3dx}{x^3}$, o ſia $\frac{du}{u^3}=\frac{zzdx}{x^3}$, in cui ſono ſeparate le variabili, eſſendo z data per x. Ma ſi oſſervi, che la quantità $\frac{adx}{xx-aa}$ ſi può ridurre ad una fluſſione logaritmica ponendo $x=\frac{\overline{a+n}\times a}{a-n}$, poichè fatte le ſoſtituzioni debite, ſarà

adx

$\frac{adx}{xx-aa} = \frac{dn}{2n}$, quindi $\frac{dz}{z} = \frac{dn}{2n}$, e però $zz = n = \frac{a \times \overline{x-a}}{x+a}$, e posto questo valore in luogo di zz nell' equazione finale, averassi $\frac{du}{u^3} = \frac{axdx - aadx}{x^4 + ax^3}$, il che ec.

Senza fare la sostituzione di $x = \frac{\overline{a+n} \times a}{a-n}$, si può ridurre la quantità $\frac{adx}{xx-aa}$ ad una flussione logaritmica per mezzo del num. 21. del Libro III., ed averassi $\frac{adx}{xx-aa} = -\frac{dx}{2 \times \overline{x+a}} + \frac{dx}{2 \times \overline{x-a}} = \frac{dz}{z}$, ed in conseguenza $zz = \frac{x-a}{x+a}$.

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $dy = -\frac{ydx}{x} + y^m dx$. Faccio $y = zu$, $dy = zdu + udz$; adunque sostituendo, $zdu + udz = -\frac{uzdx}{x} + u^m z^m dx$. Suppongasi $udz = -\frac{uzdx}{x}$, o sia $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$, ed integrando, $z = \frac{a}{x}$; avrassi l'equazione

$zdu = z^m u^m dx$, cioè $\frac{du}{u^m} = z^{m-1} dx$, o ſia $\frac{du}{u^m} = \frac{a^{m-1} dx}{x^{m-1}}$.

ESEMPIO IV.

Qualche volta è neceſſaria una doppia operazione, come in certe equazioni, che ânno più di tre termini. Sia pertanto l'equazione $xdy + ydx = adu + xdu$, e s'intenda u data in qualunque modo per la y. Diſpongo l'equazione nella ſeguente maniera $adu + xdu - xdy = ydx$, o pure $\frac{adu}{y} + \frac{xdu}{y} - \frac{xdy}{y} = dx$; pongo $x = pq$, e $dx = pdq + qdp$, onde fatte le ſoſtituzioni, ſarà $\frac{adu}{y} + \frac{pqdu}{y} - \frac{pqdy}{y} = pdq + qdp$. Chi voleſſe ridurre con una ſola operazione la formola, biſognerebbe porre $\frac{pqdu}{y} - \frac{pqdy}{y} = pdq$, cioè $\frac{du}{y} - \frac{dy}{y} = \frac{dq}{q}$, con che ſi ſcopre la q data per y; ma più elegantemente ſi opererà nel ſeguente modo. Facciaſi $-\frac{pqdy}{y} = pdq$, dunque $-\frac{dy}{y} = \frac{dq}{q}$, ed integrando, $\frac{a}{y} = q$; preſi pertanto gli altri termini dell'equazione, $\frac{adu}{y} + \frac{pqdu}{y} = qdp$, ed in vece di q poſto il valore $\frac{a}{y}$, ſarà

farà $\frac{adu}{y} + \frac{apdu}{yy} = \frac{adp}{y}$, cioè $du + \frac{pdu}{y} = dp$. Sia $p = mn$, dunque $dp = mdn + ndm$, e fatta la foftituzione, $du + \frac{mndu}{y} = mdn + ndm$; fi fupponga $\frac{mndu}{y} = mdn$, cioè $\frac{du}{y} = \frac{dn}{n}$, farà dunque n data per y, e nell'equazione reftante, dopo effere fvaniti i termini $\frac{mndu}{y}$, mdn, cioè nell'equazione $du = ndm$ faranno feparate le variabili, e farà $\frac{du}{n} = dm$.

26. In altra maniera ancora fi poffono feparare le variabili nell'equazione canonica $dy = pydx + qy^n dx$. Si faccia $pdx = \frac{dz}{\overline{1-n} \times z}$, $dx = \frac{dz}{\overline{1-n} \times pz}$; fatte le foftituzioni, farà $dy = \frac{ydz}{\overline{1-n} \times z} + \frac{qy^n dz}{\overline{1-n} \times pz}$, cioè $dy = \frac{pydz + qy^n dz}{\overline{1-n} \times pz}$, o fia $\overline{1-n} \times pzdy = pydz + qy^n dz$, e però $\frac{\overline{1-n} \times zdy - ydz}{y^n} = \frac{qdz}{p}$, dividendo per py^n, e finalmente dividendo per zz, farà $\frac{\overline{1-n} \times zy^{-n} dy - y^{1-n} dz}{zz} = \frac{qdz}{pzz}$, ed integrando, $\frac{y^{1-n}}{z} = \int \frac{qdz}{pzz}$, cioè $y^{1-n} = z \int \frac{qdz}{pzz}$; e poichè le p,

e q si suppongono date per x, e la z pure, per la sostituzione $pdx = \frac{dz}{\overline{1-n} \times z}$, è data per x, almeno trascendentemente, saranno separate le variabili.

Ripresa adunque l'equazione dell' esempio primo $ady = \frac{fydx}{x} + yydx$, vale a dire $dy = \frac{fydx}{ax} + \frac{yydx}{a}$, sarà $p = \frac{f}{ax}$, $q = \frac{1}{a}$, $n = 2$; quindi surrogati questi valori nell'equazione finale $y^{1-n} = z \int \frac{qdz}{pzz}$, sarà essa $\frac{1}{y} = z \int \frac{xdz}{fzz}$, e la sostituzione $pdx = \frac{dz}{\overline{1-n} \times z}$ sarà $\frac{fdx}{ax} = -\frac{dz}{z}$, e posta $f = 2$, $a = 1$, avremo $\frac{2dx}{x} = -\frac{dz}{z}$, cioè $z = \frac{1}{xx}$, e però $\frac{1}{y} = \frac{1}{xx} \int -xxdx$; ed integrando, $\frac{1}{y} = \frac{1}{xx} \times -\frac{1}{3} x^3 + c$, cioè $3cy - 3xx = x^3 y$, come prima. Istessamente si discorra degli altri esempj.

ESEMPIO V.

Sia l'equazione $ax^4ydy - bx^4ydy = ayyx^3dx - byyx^3dx + a^6dx - x^6dx$, la quale divisa per $ax^4y - bx^4y$, si trova essere $dy = \frac{ydx}{x} + \frac{a^6dx - x^6dx}{ax^4y - bx^4y}$, che è il caso dell'equazione canonica. Sarà adunque $p = \frac{1}{x}$, $q = \frac{a^6 - x^6}{ax^4 - bx^4}$, $n = -1$, e per la sostituzione $pdx = \frac{dz}{1-n \times z}$, sarà $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{2z}$, quindi $z = xx$; onde posti questi valori nell'equazione finale canonica $y^{1-n} = z\int\frac{qdz}{pzz}$, averemo $yy = xx\int\frac{\overline{a^6 - x^6} \times 2xdx}{\overline{ax^4 - bx^4} \times x^3}$, in cui sono separate le variabili.

27. Se l'equazione canonica fosse $y^{n-1}dy = pdx + qy^ndx$, essendo parimente le p, e q date in qualunque modo per x, si separano le indeterminate, ponendo $qdx = \frac{dz}{nz}$, e $dx = \frac{dz}{nqz}$; imperciocchè fatte le sostituzioni,

sarà

sarà $y^{n-1}dy = \frac{pdz}{nqz} + \frac{y^n dz}{nz}$, cioè $\frac{nzy^{n-1}dy - y^n dz}{z} = \frac{pdz}{qz}$, e dividendo per z, $\frac{nzy^{n-1}dy - y^n dz}{zz} = \frac{pdz}{qzz}$, ed integrando, $\frac{y^n}{z} = \int \frac{pdz}{qzz}$, cioè $y^n = z\int \frac{pdz}{qzz}$, equazione, in cui sono separate le variabili.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $2aaxydy = aayydx + 2bx^3dx$, cioè $ydy = \frac{bxxdx}{aa} + \frac{yydx}{2x}$. Sarà $n = 2$, $p = \frac{bxx}{aa}$, $q = \frac{1}{2x}$, e però averemo $\frac{yy}{z} = \int \frac{2bx^3dz}{aazz}$; ma $qdx = \frac{dx}{2x} = \frac{dz}{2z}$, ed $x = z$, adunque sarà $\frac{yy}{x} = \int \frac{2bxdx}{aa}$, ed integrando, $\frac{yy}{x} = \frac{bxx}{aa} \pm c$, curva algebraica.

Potevasi anche costruire la formola generale $y^{n-1}dy = pdx + qy^n dx$, ed in conseguenza la particolare dell'esempio per mezzo del metodo del num. 24.

28. Aggiungo una riflessione prima di finire questo Capo, cioè che tal volta si sviluppano le indeterminate miste, e confuse colle quantità differenziali, quando

do ci venga permeſſo di modificare le grandezze coeffi-
cienti, e ciò ſpezialmente ſuccede quando gli eſponenti
ſi formano dalli coefficienti, così portando il giro della
riduzione. 'A principalmente luogo queſto artifizio ne'
Problemi Fiſico-Matematici, ne' quali accoppiandoſi gran-
dezze di genere affatto diverſo, ſiamo in maggior liber-
tà di ſervirſi di quelle quantità coſtanti, che meglio
vengono al propoſito.

Per un eſempio mi propongo l'equazione $x^m dx + \overline{by + yy} \times \frac{cdx}{x} = ydy$, la quale preparata giuſta il metodo del num. 24. ſarà $x^m dx + \frac{bcydx}{x} = yy \times \overline{\frac{dy}{y} - \frac{cdx}{x}}$. Faccio adunque $\frac{dy}{y} - \frac{cdx}{x} = \frac{dp}{p}$, ed ô il valore di $y = px^c$, ed $yy = ppx^{2c}$. Queſti valori opportunamente ſoſtituiti mi danno l'equazione $x^m dx + bcpx^{c-1} dx = x^{2c} pdp$, e dividendo per x^{2c}, ſarà $x^{m-2c} dx + bcpx^{-c-1} dx = pdp$. Egli è evidente, che data l'eguaglianza fra gli eſponenti della indeterminata x, cioè fra $m - 2c$, e $-c - 1$, le incognite ſono ſeparate, avendoſi ſolamente a dividere l'omogeneo di comparazione pdp per il binomio $1 + bcp$. Ora poſto $m - 2c = -c - 1$, ne ſegue, che ſia $m + 1 = c$, quindi eſpoſta la coſtante c per $m + 1$, abbiamo l'intento. Se la c fa figura di unità, il che non ci è vietato di ſupporre, ſarà $m = 0$; e ſe $c = 2$,

ſarà

ſarà $m = 1$, e così vadaſi diſcorrendo.

L' artifizio ſpiegato ſi applichi a tutte le altre equazioni di ſimil genere, per eſempio alla ſeguente $x^m dx + \frac{cby^n dx}{x} + \frac{gy^r dx}{x} = y^t dy$, poſto però $t = r - 1$, ovvero $= n - 1$, onde ſi poſſa abbreviare la formola uſando i logaritmi.

CAPO

C A P O III.

Della Costruzione d'altre Equazioni più limitate per mezzo di varie sostituzioni.

29. Si separeranno sempre le indeterminate nell' equazione $\overline{x^n dx \pm ay^n dy} \times p = \overline{xdy - ydx} \times q$, nella quale le p, e q sono date promiscuamente per x, ed y in qualunque modo, purchè algebraicamente, quando però in ogni termine della quantità p la somma degli esponenti di x, ed y sia la stessa, e così la stessa sia in ogni termine della quantità q; non richiedendosi però, che sia la medesima in p, ed in q. Le sostituzioni da farsi sono $y = tz^{\frac{2}{n+1}}$, $x = t \times \overline{a^3 \mp azz}^{\frac{1}{n+1}}$: Surrogati i rispettivi valori in luogo di x, dx, y, dy, e fatte le debite operazioni, arriverassi dopo lunghissimo calcolo alla seguente equazione

$$t^{n-2} dt = \frac{\frac{2}{n+1} z^{\frac{1-n}{n+1}} dz \times \frac{q}{p}}{\overline{a^3 \mp azz}^{\frac{n}{n+1}}}.$$

Ma poichè si sa, che in ciascun termine di p la somma degli esponenti di x, ed y è eguale, siccome

pure in ciascun termine di q, fatte in essi ancora le sostituzioni de' valori dati per t, e per z, in ciascun termine di p, averà t la medesima potestà, siccome pure in ciascun termine di q una medesima potestà, vale a dire, che sarà l'omogeneo di comparazione moltiplicato per una potestà positiva, o negativa di t, cioè sarà per essa potestà diviso, o moltiplicato il primo membro, e però separate le variabili.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $\overline{xdx + aydy}\sqrt{y} = \overline{xdy - ydx}\sqrt{a}$; sarà $n = 1$, $p = \sqrt{y}$; $q = \sqrt{a}$, e però $\frac{dt}{t} = \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{a^3} - azz\sqrt{y}}$,

ma $y = tz^{\frac{2}{n+1}} = tz$; adunque sarà $\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$.

Nella stessa equazione si separano le indeterminate, quando anche sia negativo l'esponente n, cioè quando sia l'equazione $\overline{x^{-n}dx \pm ay^{-n}dy} \times p = \overline{xdy - ydx} \times q$, e le sostituzioni sono $y = tz^{\frac{2}{1-n}}$, $x = t \times \overline{a^3 \mp azz}^{\frac{1}{1-n}}$;

le

le quali ci danno l'equazione

$$t^{-n-2}dt = \frac{\frac{2}{1-n} z^{\frac{1+n}{1-n}} dz}{(a^3 \mp azz)^{\frac{-n}{1-n}}} \times \frac{q}{p}$$, la ſteſſa di quella di

ſopra, mutati i ſegni alla n.

E poichè l'equazione è anche eſprimibile così: $(y^n dx \pm ax^n dy) \times \frac{p}{x^n y^n} = (xdy - ydx) \times q$, ne viene, che queſta pure per la ſteſſa ſoſtituzione è coſtruibile.

30. Sia più generalmente l'equazione

$(x^n dx \pm ay^{\frac{-n-1-c}{c}} dy) \times p = (xdy + cydx) \times q$. Si ſepara-no ſempre le variabili, fatte le ſoſtituzioni di $y = t^s z^{\frac{r}{n+1}}$, $x = t^{\frac{-s}{c}} \times (a \pm acz^{\frac{-r}{c}})^{\frac{1}{n+1}}$, (s, ed r ſono numeri a piacere) ſuppoſta però la condizione, che le quantità p, q ſieno date algebraicamente, e in modo tale, che in ciaſcun termine della quantità p l'eſponente della y preſo tante volte, quanto è il numero c, ſuperi, o ſia ſuperato dall'eſponente della x col medeſimo ecceſſo, e così in ciaſcun termine della quantità q, non importando poi, che l'ecceſſo in p ſia lo ſteſſo, che in q.

Così, per esempio, essendo $c = 3$, sia $p = byyx^4 + fy^9x^{25}$ ec., e q sia $= gy^{\frac{1}{2}}x^3 - hy^{10}x^{\frac{63}{2}}$ ec. E' facile a vedere, che la c non può essere zero.

Fatte le debite sostituzioni in luogo della x, e della y nell'equazione proposta, averemo la seguente equazione

$$-\frac{s}{c}\,t^{\frac{-sn-c-cs}{c}}\,dt = \frac{\frac{r}{n+1} \times z^{\frac{r-n-1}{n+1}}\,dz \times \frac{q}{p}}{\overline{a \pm acz^{-\frac{r}{c}}}^{\,\frac{n}{n+1}}}.$$

ESEMPIO.

Sia $\overline{xdx + ay^{-3}dy} \times \frac{1}{y} = \overline{xdy + ydx} \times x$. E sia $s = 1$, $r = 2$, sarà $n = 1$, $c = 1$, $p = \frac{1}{y}$, $q = x$, e fatte le sostituzioni nell'ultima equazione di sopra ritrovata, averemo $-t^{-3}dt = \frac{dz \times xy}{\overline{a + az^{-2}}^{\,\frac{1}{2}}}$. Ma per le sostituzioni fatte, $x = t^{-1} \times \overline{a + az^{-2}}^{\,\frac{1}{2}}$, ed $y = tz$, dunque $xy = z \times \overline{a + az^{-2}}^{\,\frac{1}{2}}$, onde averemo $-\frac{dt}{t^3} = zdz$, il che ec.

31. Ma più generalmente ancora sia l'equazione $x^n dx \pm a y^{\frac{-nf-c-f}{c}} dy \times p = \overline{fxdy + cydx} \times q$, la quale comprende come casi particolari le due canoniche dei numeri antecedenti, cioè quella del num. 30., quando sia $f = 1$; e quella del num. 29., quando sia $f = 1$, $c = -1$.

Si separano le indeterminate per mezzo della sostituzione $y = t^{\frac{s}{f}} z^{\frac{r}{f \times \overline{n+1}}}$, ed $x = t^{-\frac{s}{c}} \times \overline{a \pm \frac{acz}{f}}^{\,-\frac{r}{c} \times \frac{1}{n+1}}$, essendovi però la condizione circa le quantità p, e q, che in esse l'esponente della y moltiplicato per c superi, o sia superato dall'esponente della x moltiplicato per f col medesimo eccesso in ciascun termine. Le stesse quantità p, q possono anche essere frazioni, o miste di frazioni, ed interi razionali, o irrazionali, comunque siansi; e saranno sempre nelle equazioni separabili le indeterminate, purchè le p, e q sieno in tal modo date per x, ed y, che fatte le sostituzioni assegnate, nascano in luogo loro quantità tali, che sieno il prodotto di due, una delle quali contenga la z, e non la t; l altra la t, e non la z.

Fatte le dette sostituzioni, averemo la formola

$$-\frac{s}{c} t^{\frac{-fc-fsn-sc}{cf}} dt = \frac{\frac{r}{n+1} \times z^{\frac{r-fn-f}{fn+f}} dz \times \frac{q}{p}}{\overline{a \pm \frac{acz}{f}}^{\,-\frac{r}{c} \times \frac{n}{n+1}}}.$$

ESEM-

ESEMPIO I.

Sia $\overline{xxdx + ay^3 dy} \times y = - \overline{3xdy + ydx} \times ax$. E sia, come sopra, $s = 1$, $r = 2$, sarà $f = -3$, $c = 1$, $n = 2$, $q = ax$, $p = y$, e fatte le sostituzioni nell' ultima formola ritrovata di sopra, avremo

$$-t^{-\frac{8}{3}} dt = \frac{\frac{2}{3} z^{-\frac{11}{9}} dz \times \frac{ax}{y}}{\overline{a - \frac{az^{-2}}{3}}^{\frac{2}{3}}}. \text{ Ma } y = t^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{2}{9}},$$

$x = t^{-1} \times \overline{a - \frac{az^{-2}}{3}}^{\frac{1}{3}}$, dunque sarà $- \frac{dt}{tt} = \frac{2adz}{3z \times \overline{a - \frac{az^{-2}}{3}}^{\frac{1}{3}}}$, il che ec.

ESEMPIO II.

Sia $\overline{x^{\frac{1}{2}} dx + ay^{-2} dy} \times \overline{ay^{\frac{1}{2}} x + yyx^{\frac{13}{4}}} = \overline{2xdy + 3ydx} \times \overline{y^{\frac{1}{3}} x - yxx}$; e sia $s = 1$, $r = 1$, sarà $c = 3$,

$c = 3$, $f = 2$, $n = \frac{1}{2}$, $p = ay^{\frac{1}{2}}x + yyx^{\frac{13}{4}}$, $q = y^{\frac{1}{3}}x -$ yxx, e fatte le sostituzioni, sarà

$$-\frac{\frac{1}{3}dt}{t^{\frac{19}{12}}} = \frac{\frac{2}{3}z^{-\frac{5}{9}}dz \times \overline{a + \frac{3az}{2}}^{-\frac{1}{3}\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}dz \times \overline{a + \frac{3az}{2}}^{-\frac{1}{3}}}{az^{\frac{1}{6}} \times \overline{a + \frac{3az}{2}}^{-\frac{1}{3}\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} \times \overline{a + \frac{3az}{2}}^{-\frac{1}{3}\frac{13}{6}}},$$

in cui sono separate le variabili, il che ec.

32. Nelle equazioni 1. $pxy^{n-1}dy = py^n dx + qdx$

2. $pxy^{n-1}dy = -py^n dx + qdx$

3. $apxy^{n-1}dy = bpy^n dx + qdx$

4. $apxy^{n-1}dy = -bpy^n dx + qdx$

essendo le p, e q date in qualunque maniera per x, si separano le indeterminate, ponendo rispetto alla prima $y = xz$; rispetto alla seconda $y = \frac{z}{x}$; rispetto alla terza $y = x^{\frac{b}{a}}z$; rispetto alla quarta $y = x^{-\frac{b}{a}}z$.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $2bbxyydy - 2x^3yydy = bx^4dx - 3bby^3dx + 3xxy^3dx$, che scrivo così: $\overline{bb - xx} \times 2xyydy = bx^4dx + \overline{bb - xx} \times -3y^3dx$. Riferita questa all'ultima delle

delle quattro canoniche, sarà $p = hh - xx$, $a = 2$, $n = 3$, $b = 3$, $q = hx^4$. Adunque si dovrà porre $y = \frac{z}{x^{\frac{3}{2}}}$, $dy = \frac{x^{\frac{3}{2}} dz - \frac{3}{2} z x^{\frac{1}{2}} dx}{x^3}$, $yy = \frac{zz}{x^3}$, $y^3 = \frac{z^3}{x^{\frac{9}{2}}}$, e fatte le sostituzioni, averemo $\overline{2hhx - 2x^3} \times \frac{x^{\frac{3}{2}} zzdz - \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} z^3 dx}{x^6} = hx^4 dx + \overline{3hh - 3xx} \times - \frac{z^3 dx}{x^{\frac{9}{2}}}$, cioè

$\overline{2hh - 2xx} \times \overline{xzzdz - \frac{3}{2} z^3 dx} = hx^{\frac{17}{2}} dx + \overline{3hh - 3xx} \times - z^3 dx$, e facendo le attuali moltipliche, sarà $2hhxzzdz - 2x^3 zzdz = hx^{\frac{17}{2}} dx$, cioè

$$zzdz = \frac{hx^{\frac{17}{2}} dx}{2hhx - 2x^3}.$$

33. Sia l'equazione $axdy + bydx + cy^n x^{m-1} dx + fx^m y^{n-1} dy = 0$. In questa generalmente si separano le indeterminate, ponendo $x = u^{n-1} z^{n-1}$, ed $y = z^{1-m}$, poichè fatte le dovute operazioni, si arriva all'equazio-

ne

ne $\overline{1-m}\times\overline{adz+fu^{mn-m-n+1}dz}+\overline{n-1}\times\overline{bdz+cu^{mn-m-n+1}dz}=$ $\overline{n-1}\times\overline{-bzu^{-1}du-czu^{mn-m-n}du}$, cioè $\frac{dz}{z}=$

$$\frac{\overline{n-1}\times\overline{-bu^{-1}du-cu^{mn-m-n}du}}{\overline{1-m}\times\overline{a+fu^{mn-m-n+1}}+\overline{n-1}\times\overline{b+cu^{mn-m-n+1}}}.$$

ESEMPIO.

Sia l'equazione $a^3xdy-b^3ydx=cyyxdx-fxxydy$. Sarà dunque $n=2$, $m=2$, quindi pongo $x=\frac{uz}{a}$, ed $y=\frac{aa}{z}$, cioè $x=\frac{au}{y}$, e però $dx=\frac{aydu-audy}{yy}$, onde fatte le dovute sostituzioni, averemo

$\frac{a^4udy}{y}-b^3\times\frac{aydu-audy}{y}=\frac{caayudu-caauudy}{y}-\frac{faauudy}{y}$, cioè $a^4udy+ab^3udy+aacuudy+faauudy=ab^3ydu+aacyudu$, e però $\frac{dy}{y}=\frac{ab^3du+aacudu}{a^4u+ab^3u+aacuu+aafuu}$.

34. Sia l'equazione $\frac{ydx}{\overline{bx^{\frac{1}{m}}+ay^nx^r}^m}=dy$; e più generalmente $\frac{x^{mt-1}ydx}{\overline{bx^t+ay^nx^r}^m}=dy$. Si separano le indetermi-

nate ponendo $\overline{bx^{t} + ay^{n}x^{n}}^{\,m} = zx^{mt}$, quindi

$$y = \frac{\overline{z^{\frac{1}{m}}x^{t-r} - bx^{t-r}}^{\,\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}$$, e però $dy =$

$$\frac{\frac{1}{n} \times \overline{z^{\frac{1}{m}}x^{t-r} - bx^{t-r}}^{\,\frac{1-n}{n}} \times \frac{1}{m}x^{t-r}z^{\frac{1}{m}-1}dz + \overline{t-r} \times z^{\frac{1}{m}}x^{t-r-1}dx + \overline{t-r} \times -bx^{t-r-1}dx}{a^{\frac{1}{n}}}$$

$$\frac{x^{-1}dx \times \overline{z^{\frac{1}{m}}x^{t-r} - bx^{t-r}}^{\,\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}z}$$, posto nell'equazione generale proposta il valore di y, ed y^{n}, quindi dividendo per $\frac{\overline{z^{\frac{1}{m}}x^{t-r} - bx^{t-r}}^{\,\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}$, sarà

$$\frac{\frac{1}{n} \times \frac{1}{m}x^{t-r}z^{\frac{1}{m}-1}dz + \overline{t-r} \times z^{\frac{1}{m}}x^{t-r-1}dx + \overline{t-r} \times -bx^{t-r-1}dx}{z^{\frac{1}{m}}x^{t-r} - bx^{t-r}}$$

$\frac{x^{-1}dx}{z}$,

cioè

cioè $\frac{1}{m} z^{\frac{1}{m}} dz + \overline{t-r} \times z^{\frac{1}{m}} x^{-1} dx + \overline{t-r} \times -bzx^{-1} dx =$

$nz^{\frac{1}{m}} x^{-1} dx - nbx^{-1} dx$, e però

$$\frac{z^{\frac{1}{m}} dz}{mnz^{\frac{1}{m}} + \overline{mr-mt} \times z^{\frac{1}{m}+1} + \overline{mr-mt} \times -bz - mnb} = \frac{dx}{x}.$$

Se vi fossero termini con segni negativi, si proceda nello stesso modo, e nell'equazione finale non vi sarà altra differenza, che ne' segni stessi.

35. Anche presa l'equazione più universale così $\frac{y^u dx}{\overline{bx^t + ay^n x^r}^{\,m}} = c\, x^{\overline{ut - mnt - t + r + n - ur}}\, dy$ si separano le indeterminate colla stessa sostituzione.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $\frac{aaydx}{\sqrt{bbxx - a^3 y}} = bdy$. Pongo $\sqrt{bbxx - a^3 y} = xz$, e però $y = \frac{bbxx - zzxx}{a^3}$, e $dy = \frac{2bbxdx - 2zzxdx - 2xxzdz}{a^3}$, e fatte le sostituzioni,

ni, $\frac{aadx}{xz} \times \frac{\overline{bbxx - zzxx}}{a^3} = \frac{2b^3xdx - 2bzzxdx - 2bxxzdz}{a^3}$, cioè $aabbxdx - aazzxdx = 2b^3zxdx - 2bz^3xdx - 2bxxzzdz$, o sia $2bxxzzdz = 2b^3zxdx - 2bz^3xdx + aazzxdx - aabbxdx$, e però

$$\frac{2bzzdz}{2b^3z - 2bz^3 + aazz - aabb} = \frac{dx}{x}.$$

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $\frac{xydx}{\sqrt{-bbx^4 + a^3xyy}} = \frac{dy}{b}$. Pongo $\sqrt{-bbx^4 + a^3xyy} = zxx$, e però $y = \sqrt{\frac{zzx^3 + bbx^3}{a^3}}$, e $dy =$

$$\frac{x^3zdz + \frac{3}{2}zzxxdx + \frac{3}{2}bbxxdx}{a^3\sqrt{\frac{zzx^3 + bbx^3}{a^3}}}.$$

Fatte pertanto le sostituzioni, averassi $\frac{xdx}{zxx}\sqrt{\frac{zzx^3 + bbx^3}{a^3}} =$

$$\frac{x^3zdz + \frac{3}{2}zzxxdx + \frac{3}{2}bbxxdx}{a^3b\sqrt{\frac{zzx^3 + bbx^3}{a^3}}},$$

cioè

cioè $bzzxxdx + b^3 xxdz = x^3 zzdz + \frac{3}{2} z^3 xxdx + \frac{3}{2} bbzxxdx$,

o sia $bzzxxdx + b^3 xxdx - \frac{3}{2} z^3 xxdx - \frac{3}{2} bbzxxdx = x^3 zzdz$,

e però $\frac{dx}{x} = \frac{zzdz}{bzz - \frac{3}{2} z^3 - \frac{3}{2} bbz + b^3}$.

36. Con la stessa sostituzione usata di sopra si separano le indeterminate anche nell' equazione

$$\frac{y^u dy}{\overline{bx^t + ay^n x^r}^{\,m}} = cx^{\frac{tu - n - tmn - ru + t - r}{n}} dx.$$

Pongo adunque $\overline{bx^t + ay^n x^r}^{\,m} = x^{mt} z$, sarà $y = \frac{\overline{x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}^{\,\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}$, e $dy =$

$$\frac{\overline{\frac{x^{t-r} z^{\frac{1-m}{m}} dz}{mn} + \frac{\overline{t-r}}{n} \times z^{\frac{1}{m}} x^{t-r-1} dx + \frac{\overline{r-t}}{n} \times bx^{t-r-1} dx} \times \overline{x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}^{\,\frac{1-n}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}},$$

e fatte le sostituzioni, averassi l'equazione

$$\frac{\overline{\frac{x^{t-r} z^{\frac{1-m}{m}} dz}{mn} + \frac{\overline{t-r}}{n} \times z^{\frac{1}{m}} x^{t-r-1} dx + \frac{\overline{r-t}}{n} \times bx^{t-r-1} dx} \times \overline{x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}^{\,\frac{u-n-1}{n}}}{a^{\frac{u+1}{n}} x^{tm} z} =$$

$cx^{\frac{tu - n - tmn - ru + t - r}{n}} dx$. Dividendo pertanto il numerato-

ratore, e denominatore del primo membro dell'equazione per x^{tm}, e moltiplicandola tutta per $a^{\frac{u+1}{n}} z$, ed in luogo di $\overline{x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}^{\frac{u+1-n}{n}}$ scrivendo $x^{\frac{tu-tn+t-ru+nr-r}{n}} \times \overline{z^{\frac{1}{m}} - b}^{\frac{u+1-n}{n}}$, che è lo stesso, ed unendo le dimensioni della lettera x, troveremo essere l'equazione divisibile per $x^{\frac{ut-n-tmn-ru+t-r}{n}}$, e divisa sarà

$$\overline{\frac{xz^{\frac{1-m}{m}}dz}{mn} + \frac{\overline{t-r}}{n} \times z^{\frac{1}{m}}dx + \frac{\overline{r-t}}{n} \times bdx} \times \overline{z^{\frac{1}{m}} - b}^{\frac{u+1-n}{n}} =$$

$ca^{\frac{u+1}{n}} zdx$, e finalmente di nuovo dividendo per $\overline{z^{\frac{1}{m}} - b}^{\frac{u+1-n}{n}}$, sarà

$$\frac{xz^{\frac{1-m}{m}}dz}{mn} = \frac{\overline{r-t}}{n} \times z^{\frac{1}{m}}dx + \frac{\overline{t-r}}{n} \times bdx + ca^{\frac{u+1}{n}} zdx \times \overline{z^{\frac{1}{m}} - b}^{\frac{n-u-1}{n}},$$

cioè $$\frac{dx}{x} = \frac{z^{\frac{1-m}{m}} dz}{mnca^{\frac{u+1}{n}} z \times \overline{z^{\frac{1}{m}} - b}^{\frac{n-u-1}{n}} + \overline{mr-mt} \times z^{\frac{1}{m}} + \overline{mt-mr} \times b}$$

ESEM-

ESEMPIO.

Sia l'equazione $\frac{y^3 dy}{\sqrt{bbxx - aaxy - abxy}} = \frac{xxdx}{c}$. Pongo $\sqrt{bbxx - aaxy - abxy} = xz$, e però $y = \frac{bbxx - zzxx}{aax + abx} = \frac{bbx - zzx}{aa + ab}$, e $dy = \frac{bbdx - zzdx - 2xzdz}{aa + ab}$. Fatte dunque le sostituzioni, sarà $\overline{bbx - zzx}^3 \times \frac{bbdx - zzdx - 2xzdz}{\overline{aa + bb}^3 \quad \overline{aa + ab} \times xz} = \frac{xxdx}{c}$, ed in luogo di $\overline{bbx - zzx}^3$ scrivendo $x^3 \times \overline{bb - zz}^3$, e moltiplicando tutta l'equazione per $\overline{aa + ab}^4 \times zx$, averemo

$$x^3 \times \overline{bb - zz}^3 \times bbdx - zzdx - 2xzdz = \overline{aa + ab}^4 \times \frac{zx^3 dx}{c},$$

e dividendo per $x^3 \times \overline{bb - zz}^3$, sarà $bbdx - zzdx - 2xzdz = \overline{aa + ab}^4 \times \overline{bb - zz}^{-3} \times \frac{zdx}{c}$, cioè

$$bbdx - zzdx + \overline{aa + ab}^4 \times \overline{bb - zz}^{-3} \times - \frac{zdx}{c} = 2xzdz,$$

e

e però $\frac{dx}{x} = \frac{2zdz}{bb - zz - \frac{z}{c} \times \overline{bb - zz}^{\,-3} \times \overline{aa + ab}^{\,4}}$.

37. Servirà la medesima sostituzione similmente per l'equazione più generale $\frac{\overline{hx^t + fy^n x^r}^{\,i} \times y^u dy}{\overline{bx^t + ay^n x^r}^{\,m}} = cx^{\frac{ut - n - tmn - ru + t - r + nti}{n}} dx$. Anzi servirà pure anco per l'equazione $\frac{y^{n-1} dy}{\overline{bx^t + cx^r + ay^n x^r}^{\,m}} = fx^{t - r - 1 - mt} dx$, ponendo $\overline{bx^t + cx^r + ay^n x^r}^{\,m} = x^{mt} z$; la quale, se sia $m = 1$, sarà un caso particolare del num. 27., e se sia $c = 0$, sarà un caso particolare del num. 36. Di più si potrà costruire anche l'equazione

$$\frac{\overline{gx^t + hx^r + ky^n x^r}^{\,e} \times y^{n-1} dy}{\overline{ax^t + bx^r + cy^n x^r}^{\,m}} = fx^{t - r - 1 + et - mt} dx,$$

quando però sia $ch = bk$, usando della stessa sostituzione $\overline{ax^t + bx^r + cy^n x^r}^{\,m} = x^{mt} z$.

Che se saranno in oltre $h = 0$; $b = 0$, l'equazione sarà un caso particolare della prima di questo numero,

38.

38. Si costruiranno le equazioni

$$\frac{ady}{\overline{b+cy^n+fx}^{\,u}} = gy^{1-n}dx\,,$$

$$\frac{ay^{n-1}dy}{\overline{b+cy^n+fx^m}^{\,u}} = gy^{m-1}dx\,,$$

ponendo per la prima $\overline{cy^n+fx}^{\,u} = z$, e per la seconda $\overline{cy^n+fx^m}^{\,u} = z$. E quanto alla prima, sarà dunque

$$y = \frac{\overline{z^{\frac{1}{u}}-fx}^{\,\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}}\,,\ \text{e}\ dy = \frac{1}{n}\times\frac{\overline{z^{\frac{1}{u}}-fx}^{\,\frac{1-n}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}}\times\overline{\frac{1}{u}z^{\frac{1-u}{u}}dz-fdx}\,,$$

e però fatte le sostituzioni, averemo $az^{\frac{1-u}{u}}dz = nubcgdx + nucgzdx + aufdx$, cioè

$$\frac{az^{\frac{1-u}{u}}dz}{nubcg+nucgz+auf} = dx.$$ Rispetto alla seconda averemo

$$y = \frac{\overline{z^{\frac{1}{u}}-fx^m}^{\,\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}}\,,\ \text{e però}\ dy =$$

$$\frac{1}{n}\times\frac{\overline{z^{\frac{1}{u}}-fx^m}^{\,\frac{1-n}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}}\times\overline{\frac{1}{u}z^{\frac{1-u}{u}}dz-mfx^{m-1}dx}\,,$$ e fatte

 le

le ſoſtituzioni, $x^{m-1}dx = \dfrac{az^{\frac{1-u}{u}}dz}{bcgnu + cgnuz + mafu}$.

Ma anche ſe l'equazione più generalmente preſa ſia $\dfrac{ay^{n-1}dy}{b + \overline{cy^n + p}^{\,u}} = gqdx$, eſſendo in qualunque modo le p, e q date per x, e le coſtanti, purchè ſia $q = \dfrac{dp}{dx}$, ſi ſepareranno le indeterminate ponendo ſimilmente $\overline{cy^n + p}^{\,u} = z$. Imperciocchè ſarà $y = \dfrac{\overline{z^{\frac{1}{u}} - p}^{\,\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}}$, e

però $dy = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{\overline{z^{\frac{1}{u}} - p}^{\,\frac{1-n}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}} \times \overline{\dfrac{1}{u} z^{\frac{1-u}{u}} dz - dp}$, e fatte le

ſoſtituzioni, ſarà l'equazione $az^{\frac{1-u}{u}}dz = nbcguqdx + ncguzqdx + audp$; ma ſi ſuppone $dp = qdx$, adunque ſarà

$$\frac{az^{\frac{1-u}{u}}dz}{nbcgu + ncguz + au} = qdx.$$

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $a^3dy = 6b^3dx - 3bbdx\sqrt{cy+bx}$, cioè $\frac{a^3dy}{2b-\sqrt{cy+bx}} = 3bbdx$. Posta $\sqrt{cy+bx} = z$, sarà $y = \frac{zz - bx}{c}$, $dy = \frac{2zdz - bdx}{c}$, e fatte le sostituzioni, $\frac{2a^3zdz - a^3bdx}{2bc - cz} = 3bbdx$, o sia $2a^3zdz = 6b^3cdx - 3bbczdx + a^3bdx$, e però $\frac{2a^3zdz}{6b^3c - 3bbcz + a^3b} = dx$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $\frac{ayydy}{b + \sqrt[3]{y^3 + aax - bxx}} = aadx - 2bxdx$. Pongo $\overline{y^3 + aax - bxx}^{\frac{1}{3}} = z$, sarà $y = \overline{z^3 - aax + bxx}^{\frac{1}{3}}$, e però $dy = \frac{1}{3} \times \frac{3zzdz - aadx + 2bxdx}{\overline{z^3 - aax + bxx}^{\frac{2}{3}}}$, quindi fatte le sostituzioni,

 sarà

sarà l'equazione $\frac{a}{3} \times \frac{3zzdz - aadx + 2bxdx}{b + z} = aadx -$ $2bxdx$, cioè $3azzdz = a^3 dx - 2abxdx + 3aabdx - 6bbxdx + 3aazdx - 6bzxdx$, e dividendo per $a + 3b + 3z$, sarà $\frac{3azzdz}{a + 3b + 3z} = aadx - 2bxdx$.

39. L'equazione, o formola canonica $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$ non â generalmente separabili le indeterminate, qualunque siasi l'esponente m; le â però separabili in infiniti casi, cioè infiniti sono i valori dell' esponente m, posti i quali, succede la bramata separazione.

Per determinarli mi servo di un metodo simile à quello del num. 23. Si ponga $y = Ax^p + x^r t$; (la quantità A, e gli esponenti p, r sono costanti arbitrarie da determinarsi nel progresso, e la t è una nuova variabile) sarà adunque $dy = pAx^{p-1} dx + rtx^{r-1} dx + x^r dt$, ed $yy = AAx^{2p} + 2Ax^{p+r}t + ttx^{2r}$; quindi sostituiti questi valori nella proposta formola, daranno la seguente $ax^m dx + cAAx^{2p+n} dx + 2cAtx^{p+r+n} dx + ctt x^{2r+n} dx = pAx^{p-1} dx + rtx^{r-1} dx + x^r dt$. Si supponga $cAA = pA$, $2p + n = p - 1$, $r = 2cA$; cioè $p = -n - 1$, $A = \frac{-n-1}{c}$, $r = -2n - 2$; con che in quest'ultima formola spariranno il secondo, terzo, quinto, e sesto termine, e si ridurrà ad esse-

re

re $ax^{m}dx + cttx^{-3n-4}dx = x^{-2n-2}dt$, cioè dividendo per x^{-2n-2}, $ax^{m+2n+2}dx + cttx^{-n-2}dx = dt$, o sia ($D$) $ax^{K}dx + cttx^{X}dx = dt$, fatto $K = m + 2n + 2$, $X = -n - 2$.

Ripiglio la proposta equazione $ax^{m}dx + cyyx^{n}dx = dy$, la quale ponendo $y = \frac{1}{z}$, si trasformi in quest' altra $azzx^{m}dx + cx^{n}dx = -dz$, in cui si ponga, come sopra, $z = Bx^{q} + x^{i}u$ (B, q, i sono similmente costanti da determinarsi, ed u una nuova incognita) sarà dunque $dz = qBx^{q-1}dx + iux^{i-1}dx + x^{i}du$, $zz = BBx^{2q} + 2Bx^{q+i}u + uux^{2i}$, e sostituiti questi valori, averemo $aBBx^{2q+m}dx + 2aBux^{q+i+m}dx + auux^{2i+m}dx + cx^{n}dx = -qBx^{q-1}dx - iux^{i-1}dx - x^{i}du$. Si supponga $aBB = -Bq$, $2q + m = q - 1$, $-i = 2aB$, cioè $q + m = -1$, $B = \frac{m+1}{a}$, $i = -2m - 2$, con che in quest' ultima formola spariranno il primo, secondo, quinto, e sesto termine, e si ridurrà ad essere $auux^{-3m-4}dx + cx^{n}dx = -x^{-2m-2}du$, cioè dividendo per x^{-2m-2}, $cx^{2m+n+2}dx + auux^{-m-2}dx = -du$, o sia ($G$) $cx^{\delta}dx + auux^{\omega}dx = -du$, fatto $\delta = 2m + n + 2$, $\omega = -m - 2$.

Ora nella proposta equazione sono separabili le indeterminate, quando sia $m = n$; adunque anche nelle formole D, G saranno separabili le indeterminate, quando sia $m + 2n + 2 = -n - 2$, $2m + n + 2 = -m - 2$,

dal

dal che si ricavano due valori di m, cioè $m = -3n - 4$, $m = \frac{-n-4}{3}$, posti i quali, succede la separazione delle indeterminate. Poichè adunque nella proposta equazione si separano le indeterminate quando sia $m = \frac{-n-4}{3}$, si separeranno anche nelle formole D, G quando sia $K = \frac{-X-4}{3}$, $\delta = \frac{-\omega-4}{3}$, dal che si ricavano altri due valori di m, cioè $m = \frac{-5n-8}{3}$, $m = \frac{-3n-8}{5}$.

Ripetendo lo stesso discorso, si averanno infiniti altri valori della m; come a dire $m = \frac{-7n-12}{5}$, $m = \frac{-5n-12}{7}$, $m = \frac{-9n-16}{7}$, $m = \frac{-7n-16}{9}$ ec., vale a dire generalmente $m = \frac{\overline{2h \pm 1} \times -n - 4h}{2h \mp 1}$, preso per h un qualunque numero intiero positivo principiando dall'unità; posti i quali valori nella proposta equazione, ci daranno separabili le indeterminate.

Si aggiunga, essere in oltre separabili le indeterminate nella equazione proposta, quando l'esponente m sia tale, che col metodo del num. 19. possa essa ridursi ad essere il caso del num. 14.

Sa-

Sarebbe queſto il luogo di fare uſo di due diſſertazioni del dottiſſimo Signor Eulero inſerite negli Atti dell' Accademia di S. Pietro-Burgo Tomo 6., ma perchè la ſottile maniera, con cui procede l'Autore, mi ſembra oltrepaſſare i limiti, che io mi ſono prefiſſa di una ſemplice Inſtituzione, laſcerò, che a ſuo talento la veggano i Lettori nel citato libro.

PROBLEMA I.

40. *Ritrovare la curva, la di cui ſottangente ſia eguale al quadrato dell' ordinata diviſo per una coſtante.*

Poſte le aſſiſſe $= x$, le ordinate $= y$, la ſottangente è ſempre $\frac{ydx}{dy}$, dunque deve eſſere eguale ad $\frac{yy}{a}$, e però avremo l'equazione $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{a}$, onde $adx = ydy$, ed integrando $ax = \frac{yy}{2}$, o ſia $2ax = yy$, Parabola apolloniana.

Se la ſottotangente doveſſe eſſere eguale alla doppia aſſiſſa, averebbeſi l'equazione $\frac{ydx}{dy} = 2x$, e però $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y}$, ed integrando $\frac{1}{2} lx + \frac{1}{2} la = ly$ (aggiungo la coſtante $\frac{1}{2} la$ per adempire la legge degli omogenei), cioè

cioè $l\sqrt{ax} = ly$, e togliendo i logaritmi, $\sqrt{ax} = y$, cioè $ax = yy$, parabola pure apolloniana.

Debba essere costante la sottonormale, sarà $\frac{ydy}{dx} = a$, cioè $ydy = adx$, ed integrando $\frac{yy}{2} = ax$, o sia $yy = 2ax$, parabola pure apolloniana.

Debba essere la sottangente tripla dell'assissa, sarà $\frac{ydx}{dy} = 3x$, cioè $\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{y}$, ed integrando $l\sqrt[3]{aax} = ly$, o sia $aax = y^3$, parabola prima cubica.

Debba essere la sottangente moltipla dell'assissa secondo un qualunque numero m, sarà $\frac{ydx}{dy} = mx$, cioè $\frac{dx}{mx} = \frac{dy}{y}$, ed integrando $l\sqrt[m]{a^{m-1}x} = ly$, o sia $a^{m-1}x = y^m$, curva del genere delle parabole.

Debba essere la sottotangente $= \frac{2ax + xx}{a + x}$, sarà l'equazione $\frac{ydx}{dy} = \frac{2ax + xx}{a + x}$, cioè $aydx + yxdx = 2axdy + xxdy$, o sia $\frac{adx + xdx}{2ax + xx} = \frac{dy}{y}$, ed integrando $ly = \frac{1}{2}l\overline{2ax + xx}$, e però $xx + 2ax = yy$, equazione all'iperbola.

Deb-

Debba essere la sottangente $= \frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx}$, sarà l'equazione $\frac{ydx}{dy} = \frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx}$, cioè $ayydx + 3yxxdx = 2axydy - 3x^3dy$. Secondo ciò, che è stato detto al num. 18. procuro di ridurre questa equazione al caso del num. 14.; pongo adunque $y = \frac{zz}{a}$, $dy = \frac{2zdz}{a}$, fatte le sostituzioni, sarà $z^4dx + 3zzxxdx = 4xz^3dz - 6x^3zdz$, ed eccola ridotta al suddetto caso; quindi si separeranno le indeterminate, se si porrà $z = \frac{xp}{a}$, $dz = \frac{xdp + pdx}{a}$, e fatte le sostituzioni, sarà

$\frac{p^4x^4dx}{a^4} + \frac{3ppx^4dx}{aa} = \frac{4x^4p^3}{a^3} \times \frac{xdp + pdx}{a} - \frac{6x^4p}{a} \times \frac{xdp + pdx}{a}$, cioè $9aapdx - 3p^3dx = 4xppdp - 6aaxdp$, e però $\frac{dx}{x} = \frac{4ppdp - 6aadp}{9aap - 3p^3}$, ed integrando, $lx = \frac{lm}{l\sqrt[3]{p^4 - 3aapp}}$, e restituito il valore di p, cioè $a\sqrt{\frac{ay}{x}}$, sarà $x = \frac{m}{\sqrt[3]{\frac{a^6yy - 3a^5yxx}{x^4}}}$, cioè finalmente $a^6yy - 3a^5yxx = mx$.

Le due fostituzioni fatte di $y = \frac{zz}{a}$, e di $z = \frac{xp}{a}$, per feparare le indeterminate, ci fanno vedere, che ful bel principio baftava farne una fola, cioè $y = \frac{xxpp}{a^3}$,

Ma affai più fpeditamente fi otterrà l'intento fcrivendo l'equazione così: $3yxxdx + 3x^3dy = 2axydy - ayydx$, la quale divifa per xx farà $3ydx + 3xdy = \frac{2axydy - ayydx}{xx}$, ed integrando, $3xy = \frac{ayy}{x}$, cioè $\frac{ay}{3} = xx$, parabola apolloniana, quando fi ommetta la coftante m.

Debba effer la fottangente $= \frac{4x^3 - axy}{3xx - ay}$, farà l'equazione $\frac{4x^3 - axy}{3xx - ay} = \frac{ydx}{dy}$, cioè $4x^3dy - axydy = 3xxydx - ayydx$, che fcrivo in queft' altra maniera: $4x^3dy - 3yxxdx = axydy - ayydx$. Offervo, che il fecondo membro farebbe integrabile fe foffe divifo per xxy; divido adunque tutta l'equazione, onde fia $\frac{4xdy - 3ydx}{y} = \frac{axdy - aydx}{xx}$, pongo l'integrale di effo fecondo membro $\frac{ay}{x} = z$, e fatta fvanire dall'equazione la y, farà effa $4x \times \frac{\overline{xdz + zdx} - 3zxdx}{zx} = dz$,

cioè

cioè $\frac{4xdz + zdx}{z} = dz$, la quale si potrà costruire col metodo del num. 14., o pure preparata giusta il metodo del num. 24., sarà $x \times \overline{\frac{4dz}{z} + \frac{dx}{x}} = dz$. Faccio adunque $\frac{4dz}{z} + \frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}$, ed integrando $lz^4x = la^4p$, o sia $z^4x = a^4p$, e però fatta svanire dall'equazione finale la x, averemo finalmente $\frac{a^4p}{z^4} \times \frac{dp}{p} = dz$, cioè $a^4dp = z^4dz$, ed integrando, $a^4p = \frac{z^5}{5}$, in cui restituito il valore di p, indi quello di z, sarà $xx = \frac{ay}{5}$, parabola apolloniana.

Debba esser la sottangente $= \frac{\overline{a+x}\, l\, \overline{a+x}}{a + l\, \overline{a+x}}$, sarà l'equazione $\frac{\overline{a+x}\, l\, \overline{a+x}}{a + l\, \overline{a+x}} = \frac{ydx}{dy}$, cioè $\frac{dy}{y} = \frac{adx + dx\, l\, \overline{a+x}}{\overline{a+x}\, l\, \overline{a+x}}$.

Per passare all'integrazioni, pongo $\overline{a+x}\, l\, \overline{a+x} = z$, e però $dz = dx\, l\, \overline{a+x} + adx$; (supposta la logaritmica della sottangente $= a$) sostituiti i valori nell'equazione, sarà $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$, ed integrando $y = z$, cioè $y = \overline{a+x}\, l\, \overline{a+x}$, curva trascendente, ma che facilmente si descrive, supposta la logaritmica.

PROBLEMA II.

41. *Ritrovare la curva, il di cui ſpazio ſia eguale a due terzi del rettangolo delle coordinate.*

La formola dello ſpazio è ydx, e però averaſſi $\int ydx = \frac{2}{3}xy$, quindi $ydx = \frac{2}{3}xdy + \frac{2}{3}ydx$, cioè $ydx = 2xdy$, o ſia $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y}$, ed integrando come ſopra, $l\sqrt{ax} = ly$, ed $ax = yy$, la ſteſſa parabola.

Debba lo ſpazio eſſer eguale alla quarta poteſtà dell' ordinata diviſa per un quadrato coſtante; ſarà $\int ydx = \frac{y^4}{aa}$, cioè $ydx = \frac{4y^3dy}{aa}$, o ſia $aadx = 4yydy$, ed integrando, $\frac{3aax}{4} = y^3$, parabola prima cubica.

Debba lo ſpazio eſſer eguale alla poteſtà m dell' ordinata diviſa per una coſtante, ſarà $\int ydx = \frac{y^m}{a^{m-2}}$, cioè $ydx = \frac{my^{m-1}dy}{a^{m-2}}$, o ſia $a^{m-2}dx = my^{m-2}dy$, ed integrando $\overline{m-1} \times a^{m-2}x = my^{m-1}$, curva del genere

nere delle parabole, o dell' iperbole, secondo che sarà $m-1$ positivo, o negativo.

PROBLEMA III.

42. *Date infinite parabole del medesimo genere qualunque; ritrovare, quale sia quella curva, che tutte le taglia ad angolo retto.*

Sia l'equazione $p^{m-n}x^n = y^m$, la quale (considerando, come arbitraria la p, e suscettibile d' infiniti valori) esprime infinite parabole, e similmente considerando le m, ed n, esprime qualunque genere. E sieno esse in primo luogo tutte al medesimo asse AB, (*Fig.* 3.) vertice A, diverse solo nel parametro. Una di queste infinite parabole sia AC, in cui $AB = x$, $BC = y$.

Da un qualunque punto C si conduca la tangente CT, e la normale CP; già si sa, che sarà $BT = \frac{mx}{n}$.

La curva, che si cerca, sia DC; e poichè questa deve normalmente tagliare la parabola nel punto C, per una porzione infinitesima dovrà confondersi con la normale CP nel punto C; adunque CT tangente della parabola AC sarà assieme normale alla curva DC nel punto C, ed in conseguenza BT sarà nello stesso tempo e sottotangente della parabola, e sottonormale della ricercata curva DC. Ciò, che dicesi della parabola AC, conviene a qualunque

que altra del medesimo genere. Il problema adunque consiste a ritrovare, quale sia la curva DC, la di cui sottonormale sia $= \frac{mx}{n}$. L'espressione generale della sottonormale è $\frac{ydy}{dx}$, che in questo caso deve prendersi negativa, perchè nella curva DC crescendo AB (x), cala BC (y), e però sarà l'equazione differenziale $\frac{mx}{n} = -\frac{ydy}{dx}$, e separando le variabili, $\frac{mxdx}{n} = -ydy$, ed integrando, $\frac{mxx}{2n} = -\frac{yy}{2} + aa$, o sia $\frac{nyy}{m} = \frac{2naa}{m} - xx$, equazione all'ellissi. E perchè in nessun modo ci entra il parametro p, la soluzione sarà generale per le infinite parabole così descritte.

Se l'esponente n della equazione $p^{m-n}x^n = y^m$ si supporrà negativo, onde l'equazione sia $x^n y^m = p^{m+n}$, in cui ora è positivo, sarà essa all'infinite iperbole del medesimo genere fra gli asintoti, le di cui sottotangenti sono $-\frac{mx}{n}$, e deve pure essere a queste eguale la sottonormale della curva DC; adunque sarà $-\frac{mx}{n} = -\frac{ydy}{dx}$, cioè $\frac{mxdx}{n} = ydy$; ed integrando, $\frac{mxx}{2n} = \frac{yy}{2} + aa$, o sia $xx - \frac{2naa}{m} = \frac{nyy}{m}$, equazione all'iperbola.

Se

Se le infinite parabole AC, QC ec. dell' equazione $p^{m-n}z^{n} = y^{m}$ averanno tutte lo ſteſſo parametro, ma ciaſcuna diverſo il vertice ſul medeſimo aſſe, vale a dire, ſe una ſi muova ſempre ſull' aſſe parallela a ſe medeſima; chiamando da un punto fiſſo A (*Fig.* 4.) una qualunque $AB = x$, e preſa una qual ſi ſia QC, la di cui aſſiſſa $QB = z$, ordinata $BC = y$, ſarà pure $-\frac{ydy}{dx}$ la ſottonormale della ricercata curva DC, e però eguale alla ſottotangente BT della parabola QC; quindi l' equazione $-\frac{ydy}{dx} = \frac{mz}{n}$; ma per l' equazione della parabola ſi à $z = \frac{y^{\frac{m}{n}}}{p^{\frac{m-n}{n}}}$, adunque $-\frac{ydy}{dx} = \frac{my^{\frac{m}{n}}}{np^{\frac{m-n}{n}}}$, cioè $dx = -\frac{n}{m}p^{\frac{m-n}{n}}y^{\frac{1-m}{n}}dy$, ed integrando, $x = \frac{-nnp^{\frac{m-n}{n}}y^{\frac{2n-m}{n}}}{m \times \overline{2n-m}}$, equazione della ricercata curva DC.

Le parabole ſieno apolloniane, cioè $m = 2$, $n = 1$; l' equazione integrata non ſervirà in queſto caſo, perchè fatte le ſoſtituzioni de' valori di m, ed x, averaſſi $x = -\frac{p}{0}$; ma preſa la differenziale, ſarà eſſa $dx = -\frac{1}{2}p \times \frac{dy}{y}$, equazione alla logaritmica. La

curva

curva adunque, che taglia le infinite parabole apolloniane ad angolo retto, sarà la logaritmica MCN, la di cui sottangente è eguale alla metà del parametro delle parabole.

Le parabole sieno prime cubiche, cioè $m = 3$, $n = 1$, sarà $x = \frac{ppy^{-1}}{-3}$, o sia $xy = \frac{pp}{3}$, e la curva DC sarà l'iperbola fra gli asintoti.

Le parabole sieno le seconde cubiche; cioè $m = 3$, $n = 2$, sarà $x = -\frac{4}{3}\sqrt{py}$, o sia $xx = \frac{16}{9}py$, e la curva DC la parabola ordinaria. Presi altri valori per le m, ed n, altre curve si averanno.

Se le parabole AC, QC ec. oltre l'avere sul medesimo asse diverso il vertice, averanno variabile il parametro, cioè uguale in ciascuna alla rispettiva distanza del vertice dal punto fisso E, presa una qualunque QC, sia $EB = x$, assissa della ricercata curva DC, BC ordinata $= y$, $EQ = p =$ al parametro, sarà $QB = x - p$, e l'equazione delle infinite parabole $p^{m-n}\overline{x-p}^{\,n} = y^m$, e la sottangente $BT = \frac{m}{n} \times \overline{x-p}$, e però l'equazione $-\frac{ydy}{dx} = \frac{m}{n} \times \overline{x-p}$.

Le parabole sieno apolloniane, cioè $m = 2$, $n = 1$, sarà $p = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{xx}{4} - yy}$, quindi fatte le sostituzioni

nell'

nell'equazione $-\frac{ydy}{dx} = \frac{m}{n} \times \overline{x - p}$, farà essa $-\frac{ydy}{dx} =$

$x \mp 2\sqrt{\frac{xx}{4} - yy}$, che si potrà ridurre col metodo del numero 14. alla separazione, per indi passare all'integrale, che sarà algebraico.

Se le infinite parabole AC, QC ec. dell'equazione $p^{m-n} z^n = y^m$ averanno lo stesso parametro costante, gli assi paralleli, ed i vertici variabili nella perpendicolare agli assi, vale a dire, se una si muova in maniera, che ciascun punto di essa descriva delle perpendicolari agli assi. Presane una qualunque EC (*Fig.* 5.), e chiamata $AM = EB = z$, $BC = y$, $MC = x$, e condotta alla parabola EC la tangente CT prodotta in V, sarà MV la sottonormale della ricercata curva DC; ma poichè $BT = \frac{mz}{n}$, sarà $MV = \frac{mzx}{ny}$, quindi averassi l'equazione $\frac{mzx}{ny} =$

$-\frac{xdx}{dz}$, e sostituito in luogo di y il valore $p^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}$

dato dall'equazione $p^{m-n} z^n = y^m$, sarà finalmente

$\frac{mzx}{np^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}} = -\frac{xdx}{dz}$, cioè $-\frac{mzdz}{np^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}} = dx$, ed in-

tegrando, $x = - \frac{mmz^{\frac{2m-n}{m}}}{n \times \overline{2m-n} \times p^{\frac{m-n}{m}}}$, equazione della curva ricercata *DC*.

Le parabole ſieno apolloniane, cioè $m = 2$, $n = 1$, ſarà $x = - \frac{4z^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}}$, o ſia $\frac{9pxx}{16} = z^3$, e però la curva *DC* la ſeconda parabola cubica, il di cui lato retto ſarà a quello della parabola *AC*, come il 9. al 16.

Avvertaſi, che in queſto caſo la poſizione della curva *DC* non ſarà la ſegnata nella figura 5., ma averà il vertice in *A*, tagliando ad angolo retto la parte inferiore delle parabole apolloniane, cioè incontrando il conveſſo, come nella figura 6.

Fiſſato altro genere per le parabole *AC*, ſarà pure una parabola d'altro genere la curva *DC*.

PRO-

PROBLEMA IV.

43. *Sulla retta* AD (Fig. 7.) *insista la retta* AC *in angolo semiretto, si ricerca l'equazione della curva* AB, *la di cui proprietà sia, che l'applicata* BD *abbia alla sottotangente* DF *la ragione d'una costante* a *alla* BC.

Chiamate $AD = x$, $DB = y$, sarà $CB = y - x$, quindi per la condizione del Problema si averà y, $\frac{ydx}{dy} :: a, y - x$, e però l'equazione $adx = ydy - xdy$. Per separare le indeterminate mi servo del metodo del num. 23., pongo pertanto $x = Ay + p + B$, e $dx = Ady + dp$; fatte le sostituzioni, sarà $aAdy + adp = ydy - Aydy - pdy - Bdy$, ma in questa equazione si separano le indeterminate, se spariscano il primo, e secondo termine dell'omogeneo di comparazione, cioè se sia $A = 1$, e B rimane arbitraria, che porrò per brevità $= 0$; adunque la sostituzione da farsi è $x = y + p$, $dx = dy + dp$, e l'equazione sarà $adp = -ady - pdy$, cioè $\frac{adp}{a+p} = -dy$, curva trascendente, e che dipende dalla logaritmica.

PROBLEMA V.

44. *Ritrovare la curva, la di cui area sia* $axy + bx^c y^e$, *chiamando al solito le assisse* x, *le ordinate* y.

Deve adunque essere $\int ydx = axy + bx^c y^e$; e però $ydx = axdy + aydx + cby^e x^{c-1} dx + ebx^c y^{e-1} dy$; o sia, fatto $a - 1 = m$, $mydx + axdy + cby^e x^{c-1} dx + ebx^c y^{e-1} dy = 0$. Per separare le indeterminate in questa equazione si potrebbe servirsi del metodo del num. 33. ponendo $x = u^{e-1} z^{e-1}$, ed $y = z^{1-c}$, onde $dx = \overline{e-1} \times z^{e-1} u^{e-2} du + \overline{e-1} \times u^{e-1} z^{e-2} dz$, e $dy = \overline{1-c} \times z^{-c} dz$; ma fatte le sostituzioni, ci si presenterebbe un'equazione molto composta, la quale richiederebbe un lunghissimo calcolo.

Per venirne a capo con brevità: ripresa l'equazione $\int ydx = bx^c y^e + axy$, pongo $x^c y^e = q$, onde l'equazione sia $\int ydx = bq + axy$, e però $ydx = bdq + axdy + aydx$. Ciò posto, mi servo del metodo del num. 24., a norma di cui scrivo l'equazione così: $axy \times \frac{\overline{1-a}}{a} \times \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = bdq$; indi pongo $\frac{\overline{1-a}}{a} \times \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}$; e però integrando, $\frac{\overline{1-a}}{a} l \frac{x}{y} = lp$,

o

o ſia $\frac{x^{\frac{1-a}{a}}}{y} = p$. Fatte per tanto le dovute ſoſtituzioni, averaſſi l'equazione $\frac{ax^{\frac{1}{a}}\,dp}{pp} = bdq$.

Ora per eſprimere la $x^{\frac{1}{a}}$ per le aſſunte p, q, ſi rifletta, che $x^{c}y^{e} = q$, cioè $y^{e} = \frac{q}{x^{c}}$, cioè $y = \frac{q^{\frac{1}{e}}}{x^{\frac{c}{e}}}$;

ma ſi â pure $\frac{x^{\frac{1-a}{a}}}{p} = y$, dunque $\frac{x^{\frac{1-a}{a}}}{p} = \frac{q^{\frac{1}{e}}}{x^{\frac{c}{e}}}$, o ſia $x^{\frac{e-ae+ac}{ae}} = q^{\frac{1}{e}}p$, e finalmente $x^{\frac{1}{a}} = q^{\frac{1}{e-ae+ac}}\,p^{\frac{e}{e-ae+ac}}$. Fatta adunque queſta ſoſtituzione in luogo di $x^{\frac{1}{a}}$, averemo l'equazione

$ap^{\frac{e}{e-ae+ac}-2}dp = \frac{bdq}{q^{\frac{1}{e-ae+ac}}}$, cioè $ap^{\frac{2ae-2ac-e}{e-ae+ac}}dp = bq^{\frac{-1}{e-ae+ac}}dq$, ed integrando,

$\frac{ae-aae+aac}{ae-ac} \times p^{\frac{ae-ac}{e-ae+ac}} = \frac{be-bae+bac}{e-ae+ac-1} \times q^{\frac{e-ae+ac-1}{e-ae+ac}} + g$,

equazione della curva, che ſi cerca.

E'

E' manifesto, che questa curva sarà per lo più algebraica quando le quantità a, c, e saranno razionali, ed all'opposto trascendente quando una di esse sarà irrazionale. Dissi per lo più, perchè anche poste razionali le a, c, e, sarà però trascendente la curva, se sia $e = c$; o pure $a = \frac{1 - e}{c - e}$; o $c = 1$, ed assieme $a = 1$; o $a = 0$, ed assieme $e = 1$, ed in diversi altri casi, che non serve tutti accennare.

CAPO

C A P O I V.

Della riduzione delle Equazioni differenziali del ſecondo grado.

45. QUando le equazioni differenziali del ſecondo grado ſono tali, che poſſano loro adattarſi le Regole ſpiegate dell'integrazioni sì ne' caſi delle variabili ſeparate, come in quelle, che ſono miſte, nulla occorre di più, che ſervirſi delle dette regole, e così per mezzo dell'integrazioni ridurle a' primi differenziali; e però intorno a ciò nient' altro fa d'uopo aggiungere. Che ſe poi le formole così ridotte al primo grado non averanno bene ſpeſſo ſeparabili le indeterminate, nè ſaranno coſtruibili in verun modo, la colpa non ſarà della maniera, con cui ſi ſviluppano le ſeconde differenze, ma piuttoſto di quella, con cui ſi maneggiano le prime.

Dovrà adunque verſare la noſtra induſtria circa il ridurre le equazioni *differenzio-differenziali* ad eſſere atte per le aſſegnate regole dell'integrazioni, il che ſi può tentare in più modi.

46. Una maniera potrà eſſere di ſervirſi de' ſoliti ripieghi dell'Algebra volgare traſponendo i termini, dividendoli, o moltiplicandoli per qualche quantità, ed altri ſimili. Ma prima d'ogn'altra coſa è neceſſario ricordarſi

cordarsi, o sapere, se nel passare dalle prime alle seconde differenze siasi presa qualche flussione per costante, e quale sia stata; ed in oltre, che siccome nell'integrazioni dalle prime differenze alle quantità finite si aggiunge sempre la costante, così nulla meno devesi aggiungere nelle integrazioni dalle seconde alle prime differenze. Ciò posto, sia

ESEMPIO I.

Sia proposta l'equazione $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{dudy}$, in cui la $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ è l'elemento della curva, e si suppone costante; la scrivo così $\frac{by^m dydu}{c^m} = 2ayddx + adxdy$.

Il primo membro, essendo costante du, è integrabile, quando anche si multiplichi, o si divida per qualunque funzione di y; ed osservo, che lo sarebbe pure il secondo, se si dividesse per $2\sqrt{y}$. Divido adunque tutta l'equazione per $2\sqrt{y}$, e sarà $\frac{by^m dydu}{2c^m\sqrt{y}} = \frac{2ayddx + adxdy}{2\sqrt{y}}$, ed integrando sarà $\frac{by^{m+\frac{1}{2}} du}{m+\frac{1}{2} \times 2c^m} = adx\sqrt{y} + adu\sqrt{a}$, equazione ridotta alle prime differenze.

Nell'integrare ô aggiunta la du appunto, perchè è costante, e l'ô moltiplicata in $a\sqrt{a}$ per gli omogenei.

ESEM-

ESEMPIO II.

Sia l' equazione $f = \frac{dx^2 - yddy}{y^3 dx^2}$, in cui ſi è preſa ydx per coſtante; la moltiplico per $2dy$, e ſarà $2fdy = \frac{2dx^2 dy - 2ydyddy}{y^3 dx^2}$, cioè $2fdy = \frac{2dy}{y^3} - \frac{2dyddy}{yydx^2}$, ed integrando, per eſſer coſtante ydx, ſarà $\int 2fdy =$

$$- \frac{1}{yy} - \frac{dy^2}{yydx^2} + nyydx^2 .$$

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $f = \frac{du^2 - yddy}{y^3 dx^2}$, in cui dx ſia coſtante, e du l'elemento della curva, cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2} = du$. Poichè dunque è coſtante dx, ſarà $dyddy = duddu$, e però ſoſtituendo il valore di ddy nell'equazione, ſarà $f = \frac{dydu^2 - yduddu}{y^3 dydx^2}$, e moltiplicando per $2y$, $2fy =$ $\frac{2ydydu^2 - 2yyduddu}{y^3 dydx^2}$, cioè $2fdy = \frac{2ydydu^2 - 2yyduddu}{y^4 dx^2}$,

ed integrando $2\int fdy = -\frac{du^2}{yydx^2} + ndx^2$.

In quest'altra maniera ancora: posto nell'equazione in luogo di du il suo valore, sarà essa $f = \frac{dx^2 + dy^2 - yddy}{y^3 dx^2}$,

e moltiplicando per $2ydy$, $2fydy = \frac{2ydydx^2 + 2ydy^3 - 2yydyddy}{y^3 dx^2}$,

cioè $2fdy = \frac{2ydydx^2 + 2ydy^3 - 2yydyddy}{y^4 dx^2}$, ed integrando,

$$2\int fdy = -\frac{dx^2 - dy^2}{yydx^2} \pm ndx^2.$$

ESEMPIO IV.

Sia l'equazione $adx = \frac{xyddy + xdy^2}{dx}$, in cui dx sia costante; moltiplicata per dx, e divisa per x sarà $\frac{adx^2}{x} = yddy + dy^2$, ed integrando, giacchè dx è costante, $adx\,lx + Adx = ydy$. Che se farassi la costante aggiunta $A = a$, averassi $adx\,lx + adx = ydy$, e passando avanti con l'integrazione, $axlx = \frac{yy}{2}$.

ESEM-

ESEMPIO V.

Sia l'equazione $f = \frac{dxdydu^2 + ydu^2ddx - ydxduddu}{ydxdydt^2}$, in cui du è l'archetto della curva, dt è data per x, e per y, e nessuna flussione prima è stata presa per costante; la divido per y^3dx^3, e la moltiplico per 2, e sarà $\frac{2f}{y^3dx^3} = \frac{2dxdydu^2 + 2ydu^2ddx - 2ydxduddu}{y^4dx^4dydt^2}$, o sia

$$\frac{2fdydt^2}{yydx^2} = \frac{2ydx^2dydu^2 + 2vydu^2dxddx - 2yydx^2duddu}{y^4dx^4},$$

ed integrando, $2\int\frac{fdydt^2}{yydx^2} = -\frac{du^2}{yydx^2} \pm n$.

Ma si può ben dire, essere cosa impossibile, il fare uso di questo metodo nell'equazioni, le quali sieno alquanto composte, quando a un di presso già non si sappiano le integrazioni, che devono farsi, onde passerò ad altri metodi.

47. Nella soluzione de' Problemi passando dalle prime alle seconde differenze può tornare molto comodo il non assumere, qualora sia libero, flussione alcuna per costante, per potere quindi con la formola sotto l'occhio determinare quella tale costante, per cui l'espressione venga in tale modo ad abbreviarsi, che sia

facilmente integrabile. Gli esempj saranno meglio intendere il metodo,

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $f = \frac{dy^3 + dx^2 dy - xdyddx + xdxddy}{2x^3 dy^3}$, la quale siasi avuta senza assumere alcuna flussione costante. Per abbreviare questa formola: considero, quale possa essere quella flussione, che presa per costante mi distrugga nell'omogeneo di comparazione due termini, due soli lasciandone, e trovo che due possono essere, cioè xdy, e $\frac{dx}{x}$.

Sia dunque $xdy = c$, e prese le differenze, $xddy + dxdy = 0$, e però anco moltiplicando per dx, $xdxddy + dx^2 dy = 0$, con che spariscono nell'omogeneo di comparazione dall'equazione principale il secondo, e quarto termine così, che si avrà $f = \frac{dy^3 - xdyddx}{2x^3 dy^3}$; ma essendo $xddy + dxdy = 0$, sarà $dy = -\frac{xddy}{dx}$, quindi sostituendo, sarà $f = -\frac{xdy^2 ddy}{2x^3 dxdy^3} - \frac{xdyddx}{2x^3 dy^3}$, cioè $f = -\frac{xdy^2 ddy - xdxdyddx}{2x^3 dxdy^3}$, o sia $f = \frac{-dyddy - dxddx}{2xxdxdy^2}$,

ma

ma $xdy = c$, adunque $f = -\frac{dyddy - dxddx}{2ccdx}$, e finalmente $fdx = -\frac{dyddy - dxddx}{2cc}$, ed integrando,

$\int fdx = -\frac{dy^2 - dx^2}{4cc} \pm n$, o sia $\int fdx = -\frac{dy^2 - dx^2}{4xxdy^2} \pm n$.

Quando siasi giunto all'equazione $f = \frac{dy^3 - xdyddx}{2x^3dy^3}$, si può più brevemente passare all' integrazione moltiplicandola per dx, e disponendola così: $fdx = \frac{dx}{2x^3} - \frac{dxddx}{2xxdy^2}$, mentre essendo xdy costante, sarà $\int fdx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4xxdy^2} \pm n$, come sopra.

Facciasi ora costante la quantità $\frac{dx}{x}$. Una tale supposizione dando $\frac{xddx - dx^2}{xx} = 0$, e però anco $-xdyddx + dx^2dy = 0$, toglie il secondo, e terzo termine dall'equazione principale, e la muta in questa $f = \frac{dy^3 + xdxddv}{2x^3dy^3}$, e moltiplicando per dx, $fdx = \frac{dxdy^3 + xdx^2ddy}{2x^3dy^3}$, il di cui integrale, a cagione di $\frac{dx}{x}$,

o

o $\frac{dx^3}{xx}$ costante, si trova essere $\int fdx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4xxdy^2} \pm n$, come sopra.

48. Ma per sapere a un di presso, quale flussione possa prendersi per costante, si osservi, se nell'equazione proposta vi sieno due, tre, o più termini, i quali moltiplicati, o divisi per una quantità a loro comune, possano ridursi ad essere integrabili; indi fatta l'integrazione, la loro integrale si prenda per costante, e si proceda nel modo spiegato. Se non sempre, qualche volta almeno avremo l'intento.

Ripiglio l'equazione $f = \frac{dy^3 + dx^2dy - xdyddx + xdxddy}{2x^3dy^3}$; osservo, che i due termini $dx^2dy + xdxddy$ divisi per dx rimangono $dxdy + xddy$, quantità integrabile, e che il suo integrale è xdy; ecco adunque, per qual cagione dovevasi prendere questa quantità per costante. Similmente osservo, che i due termini $dx^2dy - xdyddx$, se si dividono per $-xxdy$, ci danno $\frac{-dx^2 + xddx}{xx}$, quantità integrabile, il di cui integrale è $\frac{dx}{x}$; potevasi adunque prendere per costante anche la flussione $\frac{dx}{x}$.

ESEM-

ESEMPIO.

Venga propoſta la formola $xy \times \overline{dxddy - dyddx} = ydydx^2 - yydzdy^2 - xdxdy^2$, in cui la variabile z è in qualunque modo data per y.

La diſpongo così: $xydxddy + yydzdy^2 = yxdyddx + ydydx^2 - xdxdy^2$, ed oſſervo, che ſe ſi divida per $yydy$ l'omogeneo di comparazione, ſarà egli $\frac{yxddx + ydx^2 - xdxdy}{yy}$, il di cui integrale $\frac{xdx}{y}$. Prendo adunque per coſtante $\frac{xdx}{y}$, e però $\frac{xdx}{y} = c$, ed $\frac{xyddx + ydx^2 - xdxdy}{yy} = 0$, quindi la propoſta equazione verrà ad eſſere $xydxddy + yydzdy^2 = 0$, cioè $dz = -\frac{xdxddy}{ydy^2}$, ed integrando, per eſſere $\frac{xdx}{y}$ coſtante, $z = \frac{xdx}{ydy} \pm n$.

49. Quando in una equazione del ſecondo grado manca l'una, o l'altra delle due indeterminate con tutte le ſue funzioni, e non entrano nella formola ſe non le ſue differenze prime, o ſeconde in qual ſi ſia modo compoſte

poste, ed a qualunque dignità elevate, l'integrazione, o riduzione alle prime differenze sarà sempre in nostra mano per mezzo di una sostituzione. Questa sarà di porre la prima differenza, che fluisce, eguale ad una nuova incognita moltiplicata nella flussione assunta costante, o che si assuma ad arbitrio in caso, che nessuna fosse stata fissata costante. Per esempio: in una data equazione sia stata supposta dx variabile, e dy costante; si faccia $dx = pdy$, e prendendo le differenze nell'ipotesi di dy costante, $ddx = dpdy$. Fatta questa sostituzione in luogo di ddx, e maneggiata l'equazione, col sostituire i valori presi dall'equazione $dx = pdy$, si ridurrà sempre alle prime differenze.

O pure se tornasse più comodo, si ponga la prima flussione della variabile, che manca dall'equazione, eguale ad una nuova indeterminata moltiplicata nella prima flussione dell'altra. Fatte le debite sostituzioni, avendo riguardo alla flussione, che sarà stata presa costante, averemo l'equazione proposta ridotta alle prime differenze.

ESEMPIO I.

Sia di nuovo l'equazione dell'esempio primo del num. 46. $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{dudy}$, in cui è supposta costante la du.

Fac-

Faccio pertanto $dx = pdu$, e differenziando, $ddx = dpdu$, quindi surrogato questo valore, averemo $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydpdu + apdudy}{dudy}$, cioè $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydp + apdy}{dy}$, e però $\frac{by^m dy}{c^m} = 2aydp + apdy$, la qual equazione divisa per $2\sqrt{y}$ è integrabile, e l'integrale si è $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{\overline{m+\frac{1}{2}} \times 2c^m} = ap\sqrt{y} \pm g$;

ma $p = \frac{dx}{du}$, dunque $\frac{by^{m+\frac{1}{2}} du}{\overline{m+\frac{1}{2}} \times 2c^m} = adx\sqrt{y} \pm gdu$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $fyydydx^2 = -duddu$. La f è data per y, du è l'elemento della curva, ed ydx è la flussione presa costante. Faccio adunque $du = pydx$, e differenziando, $ddu = ydpdx$, e però fatte le sostituzioni, sarà $fyydydx^2 = -yypdpdx^2$, cioè $fdy = -pdp$; onde integrando, $2\int fdy = -pp + 2m$, ma $pp = \frac{du^2}{yydx^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{yydx^2}$; fatte pertanto le sostituzioni, e la riduzio-

ne, averassi $dx = \frac{dy}{\sqrt{2myy - 1 - 2yy \int f dy}}$.

Riduco ora la stessa equazione per mezzo dell' altra sostituzione indicata. Pongo adunque $dx = pdu$, e $ddx = dpdu + pddu$, e però $ddu = \frac{ddx - dpdu}{p}$. Fatte le sostituzioni, sarà l'equazione $fyyppdydu^2 = -\frac{duddx + dpdu^2}{p}$, ma è stata assunta costante la flussione ydx, quindi averemo $yddx + dydx = 0$, cioè $ddx = -\frac{dxdy}{y}$, o sia $ddx = -\frac{pdudy}{y}$, e surrogato questo valore ancora nell'equazione, sarà $fppyydy = \frac{dy}{y} + \frac{dp}{p}$. Ciò posto: passo avanti, e faccio $\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$, onde $py = q$, e però $fqqdy = \frac{dq}{q}$, o sia $fdy = \frac{dq}{q^3}$, ed integrando, $\int fdy = -\frac{1}{2qq} + m$; ma $qq = ppyy = \frac{yydx^2}{du^2} = \frac{yydx^2}{dx^2 + dy^2}$, dunque sarà $2\int fdy = -\frac{dx^2 - dy^2}{yydx^2} + 2m$, da cui si ricava, come sopra, $dx = \frac{dy}{\sqrt{2myy - 1 - 2yy\int fdy}}$.

ESEM-

ESEMPIO III.

Ripiglio l'equazione dell'esempio 3. del num. 46. $fy^3dx^2 = dx^2 + dy^2 - yddy$, in cui è costante dx, e pongo $dy = pdx$, e però $ddy = dpdx$, fatta la sostituzione, sarà $fy^3dx^2 = dx^2 + dy^2 - ydpdx$, e fatta sparire la dx col valore $\frac{dy}{p}$, averemo $\frac{fy^3dy^2}{pp} = \frac{dy^2}{pp} + dy^2 - \frac{ydydp}{p}$, cioè $fy^3dy^2 = dy^2 + ppdy^2 - ypdydp$, e dividendo per y^3dy, sarà $fdy = \frac{dy + ppdy - ypdp}{y^3}$, ed integrando, $\int fdy = -\frac{1}{2yy} - \frac{pp}{2yy} + m$, e fatta la sostituzione in luogo di p del valore $\frac{dy}{dx}$, $\int fdy = -\frac{1}{2yy} - \frac{dy^2}{2yydx^2} + m$, cioè $2\int fdy = -\frac{dx^2 - dy^2}{yydx^2} + 2m$, e però $dx =$

$$\frac{dy}{\sqrt{2myy - 1 - 2yy\int fdy}}.$$

50. Che se nella proposta equazione nessuna flussione sia stata presa per costante, una se ne prenda a piacere, e si operi come s'è fatto nel num. 48.

ESEMPIO.

Data l'equazione dell'esempio 5. num. 46., in cui nessuna flussione è assunta costante, cioè $fy^3dydx^3 = dxdydu^2 + ydu^2ddx - ydxduddu$ (posta ydx in luogo di dt), se si prenda costante dx, sparirà il termine ydu^2ddx, e l'equazione sarà $fy^3dydx^2 = dydu^2 - yduddu$, onde per ridurla dovrà porsi $du = pdx$, quindi $ddu = dpdx$. Surrogati questi valori, averemo $fy^3dydx^2 = ppdydx^2 - ypdpdx^2$, cioè $fy^3dy = ppdy - ypdp$, la quale equazione, per passare alle integrazioni, scrivo così: $fy^3dy = ppy \times \frac{dy}{y} - \frac{dp}{p}$, quindi integrando col metodo del num. 24. dell'antecedente capo, $\int fdy = -\frac{pp}{2yy} + m$; e restituito il valore di p, $\int fdy = -\frac{du^2}{2yydx^2} + m$.

Se si prenda costante du, sparirà il termine $ydxduddu$, e l'equazione sarà $fy^3dydx^3 = dxdydu^2 + ydu^2ddx$, e però dovrà porsi $dx = pdu$, $ddx = dpdu$. Sostituiti questi valori, averemo $fy^3dy \times p^3du^3 = pdydu^3 + ydpdu^3$, cioè $fy^3dy = \frac{pdy + ydp}{p^3}$, e però integrando, sarà $\int fdy = -\frac{1}{2ppyy} + m$,

e

e restituito il valore di p, $\int f dy = -\frac{du^2}{2yydx^2} + m$.

51. Il potersi assumere una flussione a piacere per costante nelle equazioni, in cui nessuna sia già stata presa, può rendere capaci del metodo del num. 49. alcune equazioni, le quali, per avere ambedue le indeterminate finite, non lo sieno; e ciò assumendo tale flussione per costante, che faccia sparire tutti que' termini, ne' quali si trova l'una delle indeterminate finite, rimanendo quelli soli, che l'altra contengono.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $dx^3 - dxdy^2 = ydxddx + 2xdyddy$, in cui nessuna flussione è presa costante.

Se faremo costante dx, sparirà il primo termine dell'omogeneo di comparazione, e se faremo costante dy, sparirà l'ultimo; e sì nell'uno, che nell'altro caso una sola delle indeterminate rimane. Fisso adunque costante dx; sarà l'equazione $dx^3 - dxdy^2 = 2xdyddy$. Pongo $dy = \frac{pdx}{a}$, $ddy = \frac{dpdx}{a}$; fatte le sostituzioni, sarà $dx^3 - \frac{ppdx^3}{aa} = \frac{2xpdpdx^2}{aa}$, cioè $aadx - ppdx = 2xpdp$,

o sia $\frac{dx}{x} = \frac{2pdp}{aa-pp}$; integrando adunque, sarà $lx = -l\sqrt{aa-pp} + lm$, e però $x = \frac{m}{\sqrt{aa-pp}}$, e restituito in luogo di p il suo valore $\frac{ady}{dx}$, sarà $x = \frac{m}{\sqrt{aa - \frac{aady^2}{dx^2}}}$, cioè $x = \frac{mdx^2}{\sqrt{aadx^2 - aady^2}}$, o sia $mdx^2 = aaxdx^2 - aaxdy^2$.

52. Ma quando il prendere una flussione a piacere per costante non serva per eliminare una delle due indeterminate finite, o la flussione costante sia già stata fissata, sicchè nell'equazione rimangano ambedue le indeterminate, fin'ora non è stato scoperto alcun metodo generale per procedere avanti.

I metodi spiegati possono avere tal volta il loro uso, siccome pure i soliti artifizj dell'Algebra comune con le moltiplicazioni, divisioni ec., come per esempio nell' equazione $xxydy^2 = xddx - dx^2$, la quale divisa per xx sarà $ydy^2 = \frac{xddx - dx^2}{xx}$, e però integrabile (supposta dy costante) e l'integrale è $\frac{yydy}{2} = \frac{dx}{x} + mdy$.

Tal'ora una sostituzione può rendere la proposta equazione soggetta al metodo del num. 49. Ed in fatti l'equazione $x^m ddx = yddy + dy^2 + yydy^2$, che non è sog-

ſoggetta al canone del ſuddetto numero, lo ſarà però ſe ſi faccia $ydy = dz$, onde ſia $x^m ddx = ddz + dz^2$.

53. In caſo poi, che nelle equazioni ſia già ſtata aſſunta la fluſſione coſtante, può eſſere di molto uſo il mutare l'equazione propoſta in un'altra equivalente, in cui neſſuna fluſſione ſia coſtante. Per far ciò; ſia l'equazione generale $dy = pdx$ (la p è una quantità data in qualunque modo per x, e per y) e ſia dx coſtante, differenziando ſarà $ddy = dpdx$; ma è $p = \frac{dy}{dx}$, dunque differenziando ſenza alcuna fluſſione coſtante, ſarà $dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$, quindi ſurrogato queſto valore in luogo di dp nell'equazione $ddy = dpdx$, averemo $ddy = \frac{dxddy - dyddx}{dx}$. Se pertanto in una qualunque propoſta equazione, in cui ſia coſtante dx, ſi ponga in luogo di ddy il valore $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$, ſarà eſſa mutata in un'altra equivalente, in cui neſſuna fluſſione è coſtante.

Ma perchè frequentemente altre più compoſte fluſſioni ſi aſſumono, o ſono ſtate aſſunte per coſtanti, ſarà bene rendere più univerſale queſto metodo.

Sia adunque l'equazione generale $dy = mpdx$; (la p è ſimilmente data in qualunque modo per x, e per y, ed m è una funzione qualunque di x, o di y, o di ambe

be insieme) Sia costante mdx, differenziando sarà $ddy = mdxdp$; ma $p = \frac{dy}{mdx}$, e differenziando senza assumere costante, $dp = \frac{mdxddy - dmdxdy - mdyddx}{mmdx^2}$, quindi surrogato questo valore in luogo di dp nell' equazione $ddy = mdxdp$, averemo $ddy = \frac{mdxddy - dmdxdy - mdyddx}{mdx}$. Se pertanto in una qualunque proposta equazione, in cui sia costante mdx, si ponga in luogo di ddy il valore ritrovato $\frac{mdxddy - dmdxdy - mdyddx}{mdx}$, sarà essa mutata in altra equivalente, in cui nessuna flussione è costante.

Rese in questa guisa compite le equazioni, cioè tali, che non abbiano flussione costante, per passare alla riduzione sarà in nostro arbitrio di prendere per costante quella, mediante la quale ci verrà fatto di ottenere l'intento.

ESEMPIO I.

Ci venga proposta l'equazione da ridurre $dx^2dy - dy^3 = adxddy + xdxddy$, in cui è costante dx. Posto adunque in luogo di ddy il valore $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$,

(poi-

(poichè in queſto caſo $m = 1$, e $dm = 0$) ſarà $dx^2 dy - dy^3 = adxddy - adyddx + xdxddy - xdyddx$, in cui neſſuna fluſſione è coſtante, quindi fatta coſtante la dy, ſi trova eſſere $dx^2 + xddx + addx = dy^2$, ed integrando, $xdx + adx = ydy$, equazione all'iperbola.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $\frac{-xdy^2 - xyddy - ydydx}{ydy} = \frac{aadx - xxdx}{aa + xx}$, in cui ſia ſtata preſa coſtante la fluſſione ydx. Per traſformarla in un'altra, in cui neſſuna fluſſione ſia coſtante, poichè in queſto caſo $m = y$, il valore della ddy da ſoſtituirſi ſarà $\frac{ydxddy - dxdy^2 - ydyddx}{ydx}$, e però l'equazione

$$-\frac{xdy}{y} - dx - \frac{xydxddy + xdxdy^2 + xydyddx}{ydxdy} = \frac{aadx - xxdx}{aa + xx}.$$

Per ridurla, fiſſo per coſtante la fluſſione xdy, in conſeguenza di che ſarà $xddy + dxdy = 0$, cioè $-ddy = \frac{dxdy}{x}$, e però fatta la ſoſtituzione,

$$-\frac{xdy}{y} - dx + dx + \frac{xdy}{y} + \frac{xddx}{dx} = \frac{aadx - xxdx}{aa + xx},$$

cioè $-\frac{ddx}{dx} = \frac{xxdx - aadx}{aax + x^3}$, ed integrando, $-ldx = \int \frac{aa + xx}{x} - lxdy$ (sottraggo $lxdy$, per essere quantità costante), e togliendo i logaritmi, $\frac{1}{dx} = \frac{aa + xx}{xxdy}$, cioè $xxdy = aadx + xxdx$.

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $-\frac{dxddy}{dy} - \frac{dydx}{y} = \frac{dx^2 + dy^2}{x}$, e costante la flussione ydx. Pongo adunque in luogo di ddy il corrispondente valore $\frac{ydxddy - dxdy^2 - ydyddx}{ydx}$, sarà $-\frac{dxddy}{dy} + \frac{dyddx}{dy} = \frac{dx^2 + dy^2}{x}$, in cui nessuna flussione è costante, quindi presa costante dy, sarà $xddx = dx^2 + dy^2$, la quale equazione è il caso del num. 49., e però si sa ridurre.

54. Il metodo spiegato nell' antecedente capo al num. 24. può avere uso anche nelle equazioni differenzio-differenziali, procedendo a un di presso nella maniera ivi adoperata. Eccone la pratica in alcuni esempj.

ESEM-

ESEMPIO I.

Ripiglio la formola dell'esempio primo di questo capo $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{dudy}$, in cui $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ è assunta costante, sarà $\frac{by^m dydu}{ac^m} = 2yddx + dxdy$; la preparo nella seguente maniera: $\overline{\frac{ddx}{dx} + \frac{dy}{2y}} \times dx = \frac{by^m dydu}{ac^m \times 2y}$, osservo, che le due quantità sotto la linea sono integrabili per via de' logaritmi; faccio adunque $\frac{ddx}{dx} + \frac{dy}{2y} = \frac{dp}{p}$, e però $l\,dx + l\sqrt{y} = lp + l\,du$ (aggiungo il logaritmo di du, per essere du costante) cioè $dx\sqrt{y} = pdu$. Quindi sostituendo nella proposta equazione in luogo di $\frac{ddx}{dx} + \frac{dy}{2y}$ il valore $\frac{dp}{p}$, ed in luogo di dx il valore $\frac{pdu}{\sqrt{y}}$, sarà $\frac{dpdu}{\sqrt{y}} = \frac{by^{m-1}dydu}{2ac^m}$, o sia $dp = \frac{by^{m-\frac{1}{2}}dy}{2ac^m}$, ed integrando, $b + p = \frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{\overline{m+\frac{1}{2}} \times 2ac^m}$, ma $p = \frac{dx\sqrt{y}}{du}$; e però finalmen-

te $hdu + dx\sqrt{y} = \frac{bv^{m+\frac{1}{2}}du}{\overline{m+\frac{1}{2}} \times 2ac^m}$, come nel citato esempio.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $-\frac{ddx\sqrt{xx+yy}}{x} = \frac{\overline{ydx-xdy}^2}{xx+yy}$, in cui è costante $ydx - xdy$.

La seconda differenza ddx divisa per la costante $ydx - xdy$ ci dà quantità integrabile, e però scrivo l'equazione così: $-\frac{ddx}{ydx-xdy} = \frac{x \times \overline{ydx-xdy}}{\overline{xx+yy}\sqrt{xx+yy}}$. Ma osservo, che nel secondo membro la quantità $ydx - xdy$ è sommabile, quando si divida per yy, adunque preparo l'equazione secondo il metodo, e sarà

$-\frac{ddx}{ydx-xdy} = \frac{xyy}{\overline{xx+yy}\sqrt{xx+yy}} \times \frac{ydx-xdy}{yy}$. Pongo $\frac{ydx-xdy}{yy} = dp$, ed integrando, $\frac{x}{y} = p$, quindi fatta la sostituzione, avremo $-\frac{ddx}{ydx-xdy} = \frac{xyydp}{\overline{xx+yy}\sqrt{xx+yy}}$, da cui si farà svanire la x, o la y per mezzo dell'equazione

zione $\frac{x}{y} = p$. Facciasi sparire dal secondo membro la x, collocando il suo valore py, averassi $- \frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{pdp}{aa + pp \sqrt{aa + pp}}$, e passando all'integrazione, sarà $- \frac{dx}{ydx - xdy} = - \frac{1}{\sqrt{aa + pp}}$, cioè $- \frac{dx}{ydx - xdy} = - \frac{y}{\sqrt{aayy + xx}}$, restituendo in luogo di p il suo valore $\frac{x}{y}$.

In questa integrazione potevasi aggiungere la costante $ydx - xdy$, ma o si aggiunga, o si ommetta, la integrazione dalle prime differenze alle quantità finite nell'uno, e nell'altro caso ci dà sempre le sezioni coniche.

55. Dissi al num. 52., che quando le equazioni differenzio-differenziali contengano ambedue le variabili, non vi è metodo generale per ridurle; uno però se ne può assegnare, il quale sebbene non serve per tutte, è molto universale nel genere suo, ed abbraccia tutte le infinite equazioni, che a tre canoni si rapportano. Mediante questo metodo le date equazioni si trasmutano in altre, nelle quali manca l'una delle due variabili, e che

per

per confeguenza fi fanno maneggiare col metodo del num. 49.

Il primo canone comprende quelle, che fono di due foli termini, e vengono efpreffe dalla formola generale $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, in cui fia prefa dx coftante. Per ridurre quefta equazione, pongo $x = c^{bu}$, ed $y = c^u t$; la c è un numero, il di cui logaritmo fia l'unità, b è un arbitraria da fiffarfi nel progreffo, ed u, t fono due nuove variabili. Poichè $x = c^{bu}$, ed $y = c^u t$, per le regole del calcolo efponenziale farà $dx = bc^{bu} du$, $ddx = bc^{bu} \times \overline{ddu + bdu^2}$, $dy = c^u dt + c^u tdu$, $ddy = c^u \times \overline{ddt + 2dtdu + tdu^2 + tddu}$. Ma pofta coftante dx, fi â $ddx = 0$, e però $bc^{bu} \times \overline{ddu + bdu^2} = 0$, cioè $ddu = -bdu^2$, il che foftituito in luogo di ddu nel valore di ddy, farà $ddy = c^u \times \overline{ddt + 2dtdu + \overline{1-b} \times tdu^2}$. Softituiti nella propofta equazione, in luogo di x, ed y, e fuoi differenziali, i refpettivi valori, fi muterà effa in queft'altra $ac^{bmu} \times b^p \times c^{bpu} du^p =$

$$c^{nu} t^n \times \overline{c^u dt + c^u tdu}^{\,p-2} \times c^u \times \overline{ddt + 2dtdu + \overline{1-b} \times tdu^2},$$

cioè $ac^{bu \times \overline{m+p}} b^p du^p = c^{\overline{n+p-1} \times u} t^n \times \overline{dt + tdu}^{\,p-2} \times \overline{ddt + 2dtdu + \overline{1-b} \times tdu^2}$

Ma per liberare quefta equazione dalle quantità efponenziali, cioè per togliere da effa la c, converrà che

fia

ſia $n+p-1=hm+hp$, con che ſi determina il valore dell'aſſunta h, cioè $h=\frac{n+p-1}{m+p}$, quindi l'equazione

ſarà $a\times\frac{\overline{n+p-1}^{\,p}}{\overline{m+p}^{\,p}}\,du^p =$

$$t^n\times\overline{dt+tdu}^{\,p-2}\times\overline{ddt+2dtdu+\frac{m-n+1}{m+p}\times tdu^2},$$ la-

quale, perchè contiene una ſola delle variabili finite, cioè la t, viene ad eſſer ſoggetta alla regola del ſopracitato num. 49.

Poichè adunque ſi trova il valore di $h=\frac{n+p-1}{m+p}$, toſto appariſce, quali ſoſtituzioni dovevano farſi da principio, cioè $x=c^{\frac{n+p-1}{m+p}\times u}$, ed $y=c^u t$ per ottenere l'intento.

Paſſando avanti con l'operazione, giuſta il metodo del num. 49., pongo $du=zdt$, e però $ddu=zddt+dzdt$, ma la ſuppoſizione di dx coſtante ci â dato $ddu=-hdu^2$, cioè $ddu=\frac{1-n-p}{m+p}\times zzdt^2$; adunque averemo $\frac{1-n-p}{m+p}\times zzdt^2=zddt+dtdz$, quindi $ddt=\frac{1-n-p}{m+p}\times zdt^2-\frac{dtdz}{z}$; ſoſtituiti pertanto nell'equa-

zione,

zione, in luogo di du, e ddt, i rispettivi valori, sarà

$$\frac{a \times \overline{n+p-1}^{\,p} \times z^p dt^p}{\overline{m+p}^{\,p}} =$$

$$t^n \times \overline{dt+ztdt}^{\,p-2} \times \overline{\frac{1-n-p}{p+m} \times zdt^2 - \frac{dtdz}{z} + 2zdt^2 + \frac{m-n+1}{m+p} \times zztdt^2}$$

o sia dividendo per dt^{p-1}, e moltiplicando per z,

$$\frac{a \times \overline{n+p-1}^{\,p} \times z^{p-1} dt}{\overline{m+p}^{\,p}} =$$

$$t^n \times \overline{1+tz}^{\,p-2} \times \overline{\frac{1+2m-n+p}{m+p} \times zzdt + \frac{m-n+1}{m+p} \times tz^3 dt - dz},$$

la quale equazione è ridotta alle prime differenze. E' facile a vedere, che per ridurre sul bel principio l'equazione, bastava porre $x = c^{\frac{n+p-1}{m+p} \times \int zdt}$, ed $y = c^{\int zdt}\, t$.

In questa generale equazione, che ô ridotta, ô supposta costante la flussione dx; ciò non ostante però non sarà difficoltà alcuna al metodo, che in una qualunque proposta equazione altra flussione diversa da dx sia presa costante, poichè col metodo del num. 53. si potrà mutare la proposta equazione in altra equivalente, in cui nessuna flussione sia costante, per indi poi fissare costante la suddetta dx.

ESEM-

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $xdxdy = yddy$, in cui è coſtante dx; la ſcrivo così: $xdx = ydy^{-1}ddy$. Paragonata queſta con la canonica, ſarà $a = 1$, $m = 1$, $p = 1$, $n = 1$, quindi ſurrogati queſti valori nell' equazione generale differenziale del primo grado di ſopra ritrovata, averemo

$$\frac{1}{2}zzdt = \frac{t}{1+tz} \times \overline{\frac{3}{2}zzdt + \frac{1}{2}tz^3dt - dz}.$$

ESEMPIO II.

Sia $p = 1$, $n = -1$, $m = -1$, cioè l'equazione $ax^{-1}dx = y^{-1}dy^{-1}ddy$, o ſia $\frac{adx}{x} = \frac{ddy}{ydy}$, in cui è coſtante la fluſſione dx. Riſpetto a queſta ſarà inutile il metodo, poichè ſi avrà $p + m = 0$, ed in conſeguenza infinito ciaſcuno de' termini dell'equazione generale differenziale del primo grado, a riſerva dell'ultimo.

Ma in queſto caſo, ſenz'altro artifizio, è facile la riduzione. Scrivo adunque l'equazione così: $xddy = aydydx$, ma l'integrale del primo membro è $xdy - ydx$, quello del ſecondo è $\frac{ayydx}{2}$; dunque $xdy - ydx = \frac{ayydx}{2} \pm bdx$.

56. Il fecondo canone comprende tutte quelle equazioni, nelle quali la fomma degli efponenti delle indeterminate, e dei loro differenziali fia in ciafcun termine la fteffa. Suppofte x, ed y le due indeterminate, e dx coftante, fi riducono quefte al cafo del num. 49. col porre $x = c^u$, ed $y = c^u t$, effendo parimente c un numero, il di cui logaritmo fia l'unità, e le u, t due nuove indeterminate. Per far vedere il metodo, prendo l'equazione $ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy$, la quale, febbene è di una fola dimenfione, e di tre foli termini, ciò non oftante il metodo è generale, e ferve, quanti fi fieno i termini, e qualunque la dimenfione, purchè vi fia la condizione notata.

Pongo adunque $x = c^u$, $y = c^u t$, farà $dx = c^u du$, e perchè dx è coftante, averemo $c^u ddu + c^u du^2 = 0$, cioè $ddu = -du^2$; farà pure $dy = c^u dt + c^u tdu$, $ddy = c^u \times \overline{ddt + 2dudt + tdu^2 + tddu}$, ma $ddu = -du^2$, adunque $ddy = c^u \times \overline{ddt + 2dudt}$. Softituiti pertanto quefti valori nella propofta equazione, farà effa

$$at^{-m-1} du^p \times \overline{dt + tdu}^{\,2-p} + bt^{-n-1} du^q \times \overline{dt + tdu}^{\,2-q} =$$

$ddt + 2dudt$. Perchè adunque manca in quefta la indeterminata u, fi potrà procedere avanti col metodo del fuddetto num. 49.

Faccio

Faccio $du = zdt$, sarà $ddu = dzdt + zddt$, ma $ddu = -du^2 = -zzdt^2$, adunque $ddt = -\frac{dzdt}{z} - zdt^2$, quindi surrogati questi valori, averemo

$$at^{-m-1} z^p dt^p \times \overline{dt + ztdt}^{2-p} + bt^{-n-1} z^q dt^q \times \overline{dt + ztdt}^{2-q} = -\frac{dzdt}{z} + zdt^2,$$ o sia $$at^{-m-1} z^p dt \times \overline{1 + zt}^{2-p} + bt^{-n-1} z^q dt \times \overline{1 + zt}^{2-q} = -\frac{dz}{z} + zdt,$$ equazione differenziale del primo grado. Da ciò si vede, che da principio potevasi ridurre la proposta equazione ponendo $\dot{x} = c^{\int zdt}$, ed $y = c^{\int zdt}\, t$.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $xdxdy - ydx^2 = yyddy$.

Per rapportarla alla canonica, la scrivo così: $xy^{-2} dxdy - y^{-1} dx^2 = ddy$, sarà dunque $a = 1$, $m = 1$, $p = 1$, $n = 0$, $b = -1$, $q = 2$; quindi surrogati questi valori nell'equazione canonica differenziale qui sopra ritrovata, averemo l'equazione ridotta $t^{-2} zdt \times \overline{1 + zt} - t^{-1} zzdt = -\frac{dz}{z} + zdt$, o sia $\frac{zdt + zztdt}{tt} - \frac{zzdt}{t} = -\frac{dz}{z} + zzdt$, cioè $zzdt - zzttdt = -ttdz$.

Paſſando avanti per l'integrazione, ſarà $\frac{ttdt - dt}{tt} = \frac{dz}{zz}$, e però integrando, $t + \frac{1}{t} = -\frac{1}{z} + f$, (la f è la costante aggiunta per l'integrazione) cioè $ttz + z = -t + ftz$, ma per le ſoſtituzioni $z = \frac{du}{dt}$, $x = c^u$, $y = c^u t$, ſarà $du = \frac{dx}{x}$, $t = \frac{y}{x}$, $dt = \frac{xdy - ydx}{xx}$, e però $z = \frac{xdx}{xdy - ydx}$, quindi ſurrogati i valori di t, e di z, averemo $\frac{xdx + ydy}{ydx} = f$.

57. Il terzo canone comprende tutte quelle equazioni, nelle quali l'una delle due variabili, qualunque ſiaſi, aſſieme con i ſuoi differenziali forma in ogni termine perpetuamente un medeſimo numero di dimenſioni. Ma biſogna diſtinguere due caſi; l'uno quando ſia coſtante il differenziale di eſſa variabile, che forma il medeſimo numero di dimenſioni; l'altro quando ſia coſtante il differenziale dell'altra.

E quanto al primo caſo: ſia l'equazione canonica $Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+2-n} = dx^m ddy$, in cui la ſomma degli eſponenti di x, e di dx in ogni termine è la ſteſſa; P, Q ſieno funzioni qualunque della y, e dx ſia coſtante. Per ridurre queſta equazione, ſi

fac-

cia $x = c^u$, essendo parimente c un numero, il di cui logaritmo sia l'unità, ed u una nuova variabile. Sarà adunque $dx = c^u du$, e di nuovo differenziando, presa dx costante, $c^u ddu + c^u du^2 = 0$, cioè $ddu = - du^2$. Sostituiti questi valori nell'equazione, averemo
$P dy^{m+2} + Q du^n dy^{m+2-n} = du^m ddy$, la quale, perchè non contiene la u, sarà soggetta al canone del num. 49.

Pongo adunque $du = zdy$, sarà $ddu = dzdy + zddy$, ma $ddu = - du^2$, e $du^2 = zzdy^2$, adunque averemo $zddy + dzdy = - zzdy^2$, e però $ddy = \frac{- zzdy^2 - dzdy}{z}$.

Sostituiti pertanto nella ritrovata equazione questi valori di du, e ddy, sarà
$Pdy^{m+2} + Qz^n dy^{m+2} = -z^{m+1} dy^{m+2} - z^{m+1} dy^{m+1} dz$,
e dividendo per dy^{m+1},
$P dy + Q z^n dy = - z^{m+1} dy - z^{m+1} dz$, equazione del primo grado. Potevasi adunque sul bel principio porre
$x = c^{\int zdy}$, e così in un sol colpo ridurre l'equazione.

ESEM-

ESEMPIO.

Sia l'equazione $2adx^2dy + axdxddy = 2xdxdy^2 + 2xxdyddy$, in cui sia costante dx. Pongo adunque $x = c^{\int zdy}$, e però $dx = zdyc^{\int zdy}$; $ddx = c^{\int zdy} \times \overline{zzdy^2 + zddy + dydz}$, ma dx è costante, dunque $zzdy^2 + zddy + dzdy = 0$, e però $ddy = \frac{- zzdy^2 - dzdy}{z}$.

Sostituiti adunque nell'equazione i valori di x, e di dx, averemo $2azzdy^3 + azdyddy = 2zdy^3 + 2dyddy$, e posto il valore di ddy, $2azzdy^3 + azdy \times \overline{\frac{- zzdy^2 - dzdy}{z}} = 2zdy^3 + 2dy \times \overline{\frac{- zzdy^2 - dzdy}{z}}$, cioè dividendo per dy^2, $az^3dy - azdz = - 2dz$, o sia $ady = \frac{azdz - 2dz}{z^3}$, ed integrando, $ay = -\frac{a}{z} + \frac{1}{zz}$, e finalmente restituendo il valore di z dato dalla supposizione fatta di $x = c^{\int zdy}$, cioè $z = \frac{dx}{xdy}$, averemo l'equazione ridotta

$aydx^2 = xxdy^2 - axdxdy$.

58. Rispetto al secondo caso, sia l'equazione canonica $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m-n+1} = dx^{m-1} ddx$, in cui sia costante dy, e P, Q sieno funzioni qualunque di y.

Pongo, come sopra, $x = c^u$, e però $dx = c^u du$, $ddx = c^u ddu + c^u du^2$. Fatte le sostituzioni nell'equazione canonica, averemo $P dy^{m+1} + Q du^n dy^{m-n+1} = du^{m+1} + du^{m-1} ddu$, la quale, per non contenere la u, è soggetta al canone del num. 49.

Pongo adunque $du = zdy$, quindi essendo costante dy, sarà $ddu = dzdy$, e però fatte le sostituzioni, avremo $Pdy^{m+1} + Qz^n dy^{m+1} = z^{m+1} dy^{m+1} + z^{m-1} dy^m dz$, e dividendo per dy^m, $Pdy + Qz^n dy = z^{m+1} dy + z^{m-1} dz$, equazione del primo grado, la quale potevasi in un sol colpo ridurre ponendo, come sopra, $x = c^{\int zdy}$.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $2dxdy = addx - yddx$, in cui sia costante dy. Pongo adunque $x = c^{\int zdy}$, quindi $dx = zdy \times c^{\int zdy}$, $ddx = c^{\int zdy} \times \overline{zzdy^2 + zddy + dydz}$; ma si

si suppone costante dy, dunque $ddy = 0$, e però $ddx = \frac{\int zdy}{c} \times \overline{zzdy^2 + dzdy}$. Fatte pertanto nella proposta equazione le sostituzioni, avremo $2zdy^2 = azzdy^2 + adzdy - zzydy^2 - ydydz$, e dividendo per dy, $2zdy = azzdy + adz - zzydy - ydz$, equazione differenziale del primo grado.

Per passare alla integrazione, divido l'equazione per $az - yz$, onde sia $\frac{2dy}{a-y} = zdy + \frac{dz}{z}$, o pure $\frac{2dy}{a-y} - \frac{dz}{z} = zdy$, quindi facendo uso del metodo del num. 24., se così piace, ed integrando, averemo $-\frac{1}{\overline{a-y}^2 \times z} = -\frac{1}{a-y} + m$, e finalmente restituendo il valore di $z = \frac{dx}{xdy}$, averemo l'equazione ridotta $ydx + xdy = adx$, trascurando la costante m aggiunta nell' integrazione.

'A servito quest' esempio per l'applicazione del metodo, per altro erano superflue tante operazioni, mentre l'equazione $2dxdy = addx - yddx$ si riduce in un batter d'occhio, trasportando il termine $yddx$, e scrivendo $2dxdy + yddx = addx$, poichè essendo costan-

te

te dy, l'integrale del primo membro è $ydx + xdy$, come è chiaro.

59. Oltre a ciò, che è ſtato detto intorno alle equazioni differenzio-differenziali, nelle quali neſſuna prima fluſſione ſia ſtata preſa coſtante, ſi può aggiungere un'altro metodo più univerſale, il quale ſerve per tutte quelle, che ſono compreſe ſotto la formola canonica $z^{m+1} dx^m ddx + \frac{dz}{z} dy^{m+1} = dy^m ddy$, in cui la z è in qualunque modo data per le funzioni di x, e di y.

Per ridurre queſta, ſi determini per coſtante la fluſſione $\frac{dx}{q}$, e ſia pure la q in qualunque modo data per le funzioni di x, e di y; indi ſi ponga $\frac{dx}{q} = dp$. Poichè $\frac{dx}{q}$ è coſtante, ſarà differenziando, $qddx - dxdq = 0$, cioè $ddx = \frac{dxdq}{q}$, o ſia, poſto in luogo di $\frac{dx}{q}$ il valore dp, $ddx = dqdp$. In oltre ſi ponga $dy = udp$, e preſe le ſeconde differenze nell'ipoteſi di dp coſtante, per eſſer eguale alla coſtante $\frac{dx}{q}$, ſarà $ddy = dudp$. Surrogati adunque nell'equazione canonica i valori così determinati in luogo di dx, ddx, dy,

e ddy, averemo l'equazione $z^{m+1} q^m dqdp^{m+1} + \frac{u^{m+1} dzdp^{m+1}}{z} = u^m dudp^{m+1}$, e dividendo per dp^{m+1}, sarà $z^{m+1} q^m dq + \frac{u^{m+1} dz}{z} = u^m du$, o sia $q^m dq = \frac{zu^m du - u^{m+1} dz}{z^{m+2}}$, ed integrando, $\frac{q^{m+1}}{m+1} + g = \frac{u^{m+1}}{\overline{m+1} \times z^{m+1}}$, e però $u = z \times \overline{q^{m+1} + \overline{m+1} \times g}^{\frac{1}{m+1}}$.

Ma $u = \frac{dy}{dp} = \frac{qdy}{dx}$, adunque $\frac{qdy}{dx} = z \times \overline{q^{m+1} + \overline{m+1} \times g}^{\frac{1}{m+1}}$, equazione ridotta alle prime differenze.

60. Intorno a quest'ultima equazione è da osservarsi, che se la quantità z sarà in tal modo data per x, e per y, che possa assegnarsi alla quantità q un valor tale, dato pure per x, e per y, onde in essa equazione sieno separabili le indeterminate, e però costruibile, o algebraicamente, o almeno per le quadrature, averemo la curva, da cui dipende l'equazione differenzio-differenziale. E perchè molti possono essere i valori da assegnarsi alla q, molte potranno essere le curve, e ciascun valore della q ci somministrerà una diversa curva o trascendente, o algebraica, la quale soddisfa alla questione. Sia

Sia l'equazione

$$\frac{x^4 yydxddx}{a^4} + \frac{2aaydxdy^2 + aaxdy^3}{xy} = aadyddy \, .$$

Riferendo questa alla canonica, sarà $m = 1$, $z = \frac{xxy}{aa}$,

e però la ridotta $\frac{qdy}{dx} = \frac{xxy}{aa} \times \overline{qq + 2gg}^{\frac{1}{2}}$.

Prendo la $q = x$; sarà $\frac{xdy}{dx} = \frac{xxy}{aa} \sqrt{xx + 2gg}$, cioè

$\frac{aady}{y} = xdx \sqrt{xx + 2gg}$, il di cui integrale dipende in parte dalla quadratura dell'iperbola, e la curva sarà trascendente.

61. Nel fare passaggio dalle prime alle seconde differenze, o non si assume flussione alcuna per costante, o si assume quella, che più si vuole, come è stato detto; quindi nel ricercare le sommatorie delle formole del secondo grado, poichè si sa qual partito sia stato preso, si sa altresì come governarsi, e ne sono state spiegate le regole.

Ma vi sono infiniti Problemi, che portano alle seconde differenze senza, che si sappia quali costanti involvano le formole indi nascenti. Accade tal volta, che all'espressione analitica arrivare non si possa senza valersi delle costanti, e succede altresì talora, che l'e-

quazione si sviluppi senza ricorrere alle costanti. Questi due casi adunque devono essere esaminati, e devesi procurare qualche criterio per distinguere l'uno dall'altro. E perchè meglio di ogni altra cosa possono servire gli Esempj, prendo il seguente.

Si dimanda una curva tale, che la di lei assissa elevata a qual si sia dignità sia direttamente, come la seconda differenza dell'ordinata, e reciprocamente come la seconda differenza dell'assissa medesima. Averemo dunque l'analogìa x^m, $\frac{ddy}{ddx}$ :: a, b; e per conseguenza l'equazione $bx^m ddx = addy$. In questa equazione osservo ambe le differenze seconde dell'assissa, e dell'ordinata; ma non so, quale costante sia stata assunta, o se non siasi assunta costante alcuna, e perciò non so la strada, per cui incamminarmi.

Nel caso della premessa equazione dico, che nessuna curva fra le possibili soddisfa al Problema, mentre si faccia passaggio dalle prime alle seconde differenze senza valersi delle costanti. All'opposto, determinate le costanti, si ritroveranno le curve, che adempiono le condizioni del Problema, ma infinite di numero, e differenti di natura, siccome quelle, che variano al mutarsi della costante arbitraria, che si assume.

Per distinguere l'una dall'altra spezie di queste equazioni

zioni si può far uso della maniera, o canone, che nascerà da' seguenti esempj, e servirà in tutti que' casi, nei quali il calcolo integrale non ci abbandona.

ESEMPIO I.

Venga proposta l'equazione
$z^{m+1} dx^m ddx + \frac{dz}{z} \times dy^{m+1} = dy^m ddy$; dico essere questa una di quelle tali formole, alle quali si può giugnere senza pigliare quantità alcuna in figura di costante. La variabile z sia data in qualunque modo per x, ed y.

La dimostrazione si renderà generale, per quanto si può, pigliando come costante la flussione $\frac{dx}{q}$, in cui q è una funzione di x, ed y in qualunque modo combinate. Pongo per tanto $\frac{dx}{q} = dp$, e giacchè il primo membro di questa equazione è costante, sarà tale anche il secondo dp; per lo che essendo $dx = qdp$, se si passi alle seconde differenze, sarà $ddx = dqdp$.

Appresso facciasi $dy = udp$, e prese le seconde differenze nell'ipotesi di dp costante, averassi $ddy = dudp$. Quindi surrogati nella equazione principale i valori così

de-

determinati, nascerà l'equazione $z^{m+1}q^m dq dp^{m+1} + \frac{u^{m+1}dzdp^{m+1}}{z} = u^m dudp^{m+1}$, e dividendo per dp^{m+1}, nascerà l'equazione libera dall'incognita p, e dalle sue funzioni, cioè $z^{m+1}q^m dq + \frac{u^{m+1}dz}{z} = u^m du$. Sommando adunque, per le spiegate regole, non ommessa l'addizione della costante g, $\frac{q^{m+1}}{m+1} + g = \frac{u^{m+1}}{\overline{m+1} \times z^{m+1}}$, la quale equazione ci dà $u = z \times \overline{q^{m+1} + gm + g}^{\frac{1}{m+1}}$. E poichè $dy = udp = \frac{udx}{q}$, fatte le opportune sostituzioni, ci si presenta l'equazione al più semplice stato ridotta, cioè

$dy = \frac{zdx}{q} \times \overline{q^{m+1} + gm + g}^{\frac{1}{m+1}}$, il che ec.

Dalla premessa maniera d'operare si deducono i seguenti Corollarj.

I. Se determinata la grandezza z, l'ultima equazione si costruirà, almeno per le quadrature, mentre ciò possa eseguirsi è manifesto, che infinite curve rispondono alla nostra formola, le quali cangiano natura alla mutazione della flussione costante assunta $\frac{dx}{q}$, ed ogni valore della

quan-

quantità q ci ſomminiſtra una nuova equazione locale o algebraica, o traſcendente.

II. Benchè alterato il valore della ſpezie q, naſcano curve diverſe, certo è però, che ſe pongaſi la coſtante aggiunta $g = o$, averaſſi ſempre l'equazione $dy = zdx$. In queſto caſo nulla rileva, quale differenza $\frac{dx}{q}$ ſiaſi preſa per coſtante; conciofiacchè collo ſparire della data g, anche la variabile q ſi dilegua.

III. Ed ecco il ſegno, onde ſi conoſce, che alla noſtra equazione primaria ſi perviene ſenza aſſumere coſtante fluſſione alcuna, e che in tale ſuppoſizione la ſua ſommatoria ſi è $zdx = dy$. Di fatto richiamata ſotto gli occhj la noſtra eſpreſſione $z^{m+1}dx^m ddx + \frac{dz}{z} \times dy^{m+1} - dy^m ddy = o$, e di bel nuovo differenziando l'integrale $zdx = dy$, ſenza aſſumere alcuna coſtante, onde ſi abbia $zddx + dzdx = ddy$, ſe con il mezzo di queſte due ultime equazioni faraſſi ſvanire nella formola principale, prima la dy, poſcia la dx con le loro funzioni, ſi ſcoprirà

$$z^{m+1}dx^m ddx + z^m dzdx^{m+1} - z^{m+1}dx^m ddx - z^m dzdx^{m+1} = o,$$

$$dy^m ddy - \frac{dz}{z} dy^{m+1} + \frac{dz}{z} dy^{m+1} - dy^m ddy = o.$$

IV. Maneggiata la formola primaria, come ſopra, ed eſſendoſi ritrovata l'equazione ridotta al primo grado, cioè

cioè $dy = \frac{zdx}{q} \times \overline{q^{m+1} + gm + g}^{\frac{1}{m+1}}$, si dovrebbe fare transito alle integrazioni, le quali alle volte sono superiori alla nostra industria, secondo i varj valori dell'esponente m della frazione z data per x, e per y, e della quantità $\frac{dx}{q}$, che si piglia per costante. Comunque vada la faccenda, determinati in infiniti casi particolari i predetti valori, e scoperta l'equazione locale della curva in termini finiti, quando si passi alle prime, indi alle seconde differenze, tenuta ferma la costante $\frac{dx}{q}$, ci si presenterà la nostra formola principale. Ma mutata costante, altre, ed altre formole si troveranno. Non mi fermo di più, perchè ciò è manifesto tornando indietro per le vestigia dell'Analisi.

V. Interviene lo stesso, tolta per costante la prima flussione $\frac{dy}{q}$; conciosiacchè fatta l'operazione a norma del metodo, la quale io tralascio per brevità, arriverassi all'equazione ridotta $dx = \frac{dy}{z} - \frac{dy}{q} \times \overline{mg + g}^{\frac{1}{m+1}}$, in cui parimente si noti, che fatta $g = 0$, torna a restituirsi l'equazione $dx = \frac{dy}{z}$ espressa per le prime differenze.

VI.

VI. Adoperate alcune limitazioni più ſemplici, cioè $m = 1$, $z = xx$, e $q = x$, ſe ſi farà uſo della costante $\frac{dx}{q}$, come nel Corollario IV., la formola

$$dy = \frac{zdx}{q} \times \overline{q^{m+1} + gm + g}^{\frac{1}{m+1}}$$

ſi muta nella ſeguente $dy = xdx \sqrt{xx + 2g}$, la quale ammette integrazione analitica. Fatto poi uſo della eſpreſſione contenuta nel Corollario V. $dx = \frac{dy}{z} - \frac{dy}{q} \times \overline{mg + g}^{\frac{1}{m+1}}$ naſcente dalla coſtante aſſunta $\frac{dy}{q}$, tenute ferme le medeſime limitazioni di $m = 1$, $z = xx$, e $q = x$, riſulta l'eſpreſſione $\frac{xxdx}{1 - x\sqrt{2g}} = dy$, che ſenza l'ajuto de' logaritmi non è ſommabile, ed in conſeguenza ci dà curve traſcendenti.

Egli è adunque manifeſto, che alla formola differenziale del ſecondo ordine $z^{m+1} dx^m ddx + \frac{dz}{z} dy^{m+1} = dy^m ddy$ ſi poteva arrivare ſenza prendere alcuna coſtante, nel qual caſo â luogo l'integrale $zdx = dy$; ovvero fiſſando per coſtanti, a cagion d'eſempio, le fluſſioni $\frac{dx}{q}$, $\frac{dy}{q}$, ed allora ci ſi fanno avanti le ſommatorie,

che in tali ſuppoſizioni ſi ſono ritrovate.

ESEMPIO II.

Abbiaſi l'equazione $x^m ddx = ddy + dy^2$. Dico, che ad eſſa non ſi può arrivare, ſenza prendere una qualche coſtante, ſalvo l'unico caſo, in cui ſia $m = -1$. Per vederlo chiaramente: maneggio la formola nel ſeguente modo.

Primieramente prendo per coſtante dx; e però $ddx = 0$, dunque $-\frac{ddy}{dy} = dy$, ed integrando $l\frac{dx}{dy} = y$, ovvero $\frac{dx}{dy} = c^y$. Pongaſi $c^y = z$, ſarà $ylc = lz$, e però $dy = \frac{dz}{z}$, e ſoſtituendo in luogo di dy queſto valore, avraſſi $\frac{zdx}{dz} = c^y$, ma $c^y = z$, dunque $dx = dz$, ed $x = z = c^y$; e però $\frac{dx}{x} = dy$, equazione alla logaritmica.

Secondariamente mi faccio ad inveſtigare, coſa ſucceda nell' ipoteſi di un' altra coſtante, per eſempio dy, e però $ddy = 0$. Pongo $dx = sdy + cdy$; la s è una nuova variabile, e la c una quantità data. M'inoltro

alle

alle feconde differenze, farà $ddx = dsdy$, e fatta la foftituzione, $x^m dsdy = dy^2$, o fia $x^m ds = dy$; ma $dy = \frac{dx}{s+c}$, dunque $sds + cds = x^{-m} dx$, e fommando, ommeffa l'aggiunta della coftante, $\frac{ss}{2} + cs = \frac{x^{-m+1}}{-m+1}$, ovvero $s+c = \sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1} + cc}$. Ma $dx = \overline{s+c} \times dy = dy\sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1} + cc}$, dunque $\frac{dx}{\sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1} + cc}} = dy$.

Profeguifco, e cerco, fe ftia per avventura nafcofta fotto l'ultima formola la logaritmica, che effendofi di fopra ritrovata nell'ipotefi della coftante dx, può effere, che abbia luogo anche nell'altra fuppofizione della coftante dy. Fatta $c = 0$, è d'uopo, che fi verifichi l'uguaglianza $\sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1}} = x$, o pure $2x^{-m+1} = \overline{-m+1} \times xx$. E perchè ftia falda l'egualità, la fteffa quantità $-m+1$ deve effere, tanto nel coefficiente, quanto nell'efponente, $= 2$; onde ne fegue, che ciò s'ottiene, determinato l'indice $m = -1$.

Nella formola adunque $x^m ddx = ddy + dy^2$, limitando il valore dell'esponente $m = -1$, si perviene all'equazione differenziale del secondo grado senza assumere costante, la di cui sommatoria è l'espressione logaritmica $\frac{dx}{x} = dy$. In ogni altro caso non si può ottenere la premessa espressione, se non fissando qualche grandezza infinitesima del primo ordine, siccome costante.

ESEMPIO III.

Rimane, che si proponga per ultimo una equazione differenziale dell'altra classe, a cui non si possa mai giungere senza assumere una costante.

Ripiglio il Problema: Costruire una curva, in cui qualsivoglia dignità dell'assissa stia in ragione diretta della seconda flussione dell'ordinata, ed inversa della seconda flussione dell'assissa.

L'equazione è $bx^m ddx = addy$. Facciasi $dx = qdp$, $dy = udp$; e praticate le operazioni, come nell'Esempio primo, averemo, prese le seconde differenze, $ddx = dpdq$, $ddy = dudp$, e surrogati i valori, $bx^m dq = adu$,

e ſommando, $\int bx^m dq = au \pm g$. Ma $dy = udp = \frac{udx}{q}$,

dunque $dy = \frac{dx}{q} \int x^m dq \pm \frac{gdx}{q}$. In queſto caſo, fatta $g = 0$, qual ſi ſia valore della ſpezie q ci dà una curva differente, ſe pure non ſi poneſſe l'eſponente $m = 0$, con che ſi diſtrugge l'ipoteſi, e ſi cangia problema. Lo ſteſſo dicaſi, fatta coſtante la frazione $\frac{dy}{q}$, e da ciò ſi conchiuda, non eſſer poſſibile un'equazione differenziale del primo grado, che ſenza il benefizio della coſtante reſtituiſca la noſtra formola, quando di bel nuovo venga differenziata; concioſiacchè, ſe vi foſſe, averebbe a manifeſtarſi in qualunque aſſunzione di coſtante, e pure l'analiſi ci dimoſtra il contrario.

PROBLEMA I.

62. *Dato il raggio oſculatore in qual ſi ſia modo per l'ordinata dalla curva, ritrovare la curva.*

Siccome, data la curva, il ritrovare il di lei raggio oſculatore ſi chiama il problema, o metodo diretto de' raggi oſculatori, di cui ſi è trattato al Capo V.

del

del Libro secondo; così, dato il raggio osculatore, ritrovare, quale sia la curva, a cui egli appartiene, si chiama il problema inverso de' raggi osculatori. Sia pertanto il raggio osculatore $= r$ dato in qualsivoglia modo per la ordinata y della curva; presa quella, che si vuole, delle formole de' raggi osculatori per le curve in primo luogo riferite al fuoco, per esempio $\frac{yds^3}{dxds^2 - ydxddy}$, in cui dx è costante, e la ds è l'elemento della curva, averemo l'equazione $r = \frac{yds^3}{dxds^2 - ydxddy}$, o pure essendo $ds^2 = dx^2 + dy^2$, e $dsdds = dyddy$, perchè dx è costante, $r = \frac{ydyds^2}{dxdyds - ydxdds}$.

Per ridurre questa equazione mi servo del metodo del num. 49., e però pongo $ds = pdx$, onde $dds = dpdx$, quindi fatte le sostituzioni nell'equazione, sarà $r = \frac{ppydy}{pdy - ydp}$, o sia $\frac{pdy - ydp}{pp} = \frac{ydy}{r}$, e però integrando, giacchè r è data per y, $\frac{y}{p} = \int \frac{ydy}{r} \pm b$, ma $p = \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, dunque la curva sa-

rà $\frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \int \frac{ydy}{r} \pm b$; equazione ridotta alle prime differenze, perchè essendo r data per y, l'integrale $\int \frac{ydy}{r}$ si potrà sempre avere, almeno trascendentemente.

In altro modo;

Scrivo l'equazione $r = \frac{yds^3}{dxds^2 - ydxddy}$ così:

$\frac{yds^3}{r} = dxds^2 - ydxddy$, indi dal punto B, (*Fig.* 8.) da cui partono le ordinate BE della ricercata curva AEC, conduco normale ad EB la BF terminata al raggio osculatore EQ, e chiamate $BF = p$, $EF = q$, per le note formole della normale, e sottonormale, sarà $q = \frac{yds}{dx}$, $p = \frac{ydy}{dx}$, o sia $dy = \frac{pdx}{y}$, e differenziando nell'ipotesi di dx costante, $ddy = \frac{ydpdx - pdxdy}{yy}$, e fatta la sostituzione nell'equazione principale, sarà $\frac{yds^3}{r} = dxds^2 - dpdx^2 + \frac{pdx^2 dy}{y}$, ma $ds = \frac{qdx}{y}$, dunque $\frac{q^3 dx}{r} = qqdx - yydp + pydy$, ed essendo $dx = \frac{ydy}{p}$,

sarà

farà $\frac{q^3 dy}{r} = qqdy + ppdy - ypdp$. Ma, per l'angolo retto EBF, è $pp = qq - yy$, e $pdp = qdq - ydy$, quindi fatta la sostituzione, si averà $\frac{qqdy}{r} = 2qdy - ydq$, e moltiplicando per y, indi dividendo per qq, sarà $\frac{ydy}{r} = \frac{2qydy - yydq}{qq}$, ed integrando, $\int \frac{ydy}{r} \pm b = \frac{yy}{q}$, ma $q = \frac{yds}{dx}$, dunque $\int \frac{ydy}{r} \pm b = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Più semplicemente ancora, sfuggendo le seconde differenze, si potrà fare così:

Preso l'archetto infinitesimo EC, sia CED la corda prodotta, a cui sia normale BD, se ora si chiami $BD = p$, per le cose dette al numero 115. del Capo V. del secondo Libro, QE, cioè $r = \frac{ydy}{dp}$, e però $\frac{ydy}{r} = dp$, ed integrando, per essere r data per y, $\int \frac{ydy}{r} \pm b = p$; ma nello stesso citato luogo $p = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, dunque

que $\int \frac{ydy}{r} \pm b = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Sia $r = \frac{y}{b} \sqrt{aa + bb}$, adunque sarà

$\int \frac{bdy}{\sqrt{aa + bb}} \pm b = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, ed integrando attualmente, ommessa per maggiore semplicità la costante b, $\frac{b}{\sqrt{aa + bb}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, e però $bbdx^2 + bbdy^2 = aadx^2 + bbdx^2$, cioè $bdy = adx$, logaritmica spirale dell' Esempio V. num. 128. dello stesso Capo V. Libro II.

In luogo del raggio QE, ci venga dato in qualunque modo per l'ordinata y il co-raggio HE, che chiamo $= z$. Per la similitudine de' triangoli EBD, QEH, sarà EB, $BD :: QE$, EH, cioè y, $p :: \frac{ydy}{dp}$, z, e però $z = \frac{pdy}{dp}$, o sia $\frac{dy}{z} = \frac{dp}{p}$, ed integrando, $\int \frac{dy}{z} \pm b = lp$. Sia $z = y$, sarà $\int \frac{dy}{y} \pm b = \frac{dp}{p}$, ed integrando, $ly = lp + l\frac{m}{b}$, cioè $y = \frac{pm}{b}$; ma $p = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, dunque $b \sqrt{dx^2 + dy^2} = mdx$, e pe-

rò $hdy = dx\sqrt{mm - hh}$, logaritmica ſpirale, e la ſteſſa della citata di ſopra, quando ſia $h = b$, $m = \sqrt{aa + bb}$.

63. Per le curve riferite all' aſſe la formola del raggio oſculatore è $\frac{ds^3}{-dxddy}$, poſta dx coſtante, e però l'equazione $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$.

Pongo $dy = qdx$, e però $ddy = dqdx$, onde fatte le ſoſtituzioni, $r = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx^2 dq}$, e poſto il valore $\frac{dy}{q}$ in luogo di dx, $r = \frac{dy \times \overline{1 + qq}^{\frac{3}{2}}}{-qdq}$, cioè $\frac{dy}{r} = \frac{-qdq}{\overline{1 + qq}^{\frac{3}{2}}}$, ed integrando, $\int \frac{dy}{r} \pm h = \frac{1}{\sqrt{1 + qq}}$, ma $q = \frac{dy}{dx}$, dunque $\int \frac{dy}{r} \pm h = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Sia $r = \frac{\overline{4yy + aa}^{\frac{3}{2}}}{2aa}$, adunque ſarà $\int \frac{2aady}{\overline{4yy + aa}^{\frac{3}{2}}} \pm h = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, ed integrando attual-

mente,

mente, ommessa la costante h, $\frac{2y}{\sqrt{4yy + aa}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, cioè $2ydy = adx$, ed integrando, $yy = ax$, parabola dell' Esempio primo num. 122. dello stesso Capo V. Libro II.

In luogo del raggio, ci venga dato il co-raggio, che chiamo $= z$, la di cui formola, supposta dx costante, è $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$. Dunque $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = z$, e posta $dy = qdx$, $ddy = dqdx$, e fatte le sostituzioni de' valori di ddy, e di dx, sarà $\frac{dy \times \overline{1 + qq}}{-qdq} = z$, cioè $\frac{dy}{z} = \frac{-qdq}{1 + qq}$, ed integrando, $\int \frac{dy}{z} \pm h = -l\sqrt{1 + qq}$, quindi se la z, cioè il co-raggio sarà in tal modo dato per y, che $\int \frac{dy}{z}$ sia logaritmico, avremo l'equazione differenziale del primo grado espressa nella solita ordinaria maniera, in altro caso sarà espressa con quantità logaritmiche.

Sia $z = \frac{4y^3 + aay}{aa}$, averemo l'equazione $\int \frac{aady}{4y^3 + aay} \pm h = -l\sqrt{1 + qq}$, ed integrando attual-

mente, ommessa la costante h, $l \frac{y}{\sqrt{yy + \frac{aa}{4}}} =$

$l \frac{1}{\sqrt{1 + qq}}$, e però $\frac{yy}{yy + \frac{aa}{4}} = \frac{1}{1 + qq}$, e posto il

valore di q, $2ydy = adx$, ed integrando, $yy = ax$, la parabola sopra citata.

64. Il raggio osculatore, o co-raggio sia in secondo luogo dato in qualsivoglia modo per l'assissa x, egli è chiaro, che in questo caso non possono servire le riduzioni avute nel primo, poichè le sommatorie $\int \frac{dy}{r}$, $\int \frac{dy}{z}$ non si averanno mai, se r, e z sieno date per x.

Presa adunque la formola del raggio osculatore in cui è costante dx, cioè $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ per le curve riferite all'asse (giacchè in quelle riferite al fuoco il raggio, o co-raggio non può esser dato per l'assissa) sarà

$r = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$; e però istessamente, come sopra, pongo $dy = qdx$, onde $ddy = dqdx$, $dy^2 = qqdx^2$, e fatte le

sosti-

fostituzioni, $r = \frac{\overline{dx^2 + qqdx^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx^2 dq}$, cioè $\frac{dx}{r} = \frac{-dq}{\overline{1+qq}^{\frac{3}{2}}}$,

ed integrando, $\int \frac{dx}{r} \pm h = \frac{-q}{\overline{1+qq}^{\frac{1}{2}}}$, equazione ridotta alle prime differenze, perchè essendo r data per x, la sommatoria $\int \frac{dx}{r}$ si potrà sempre avere, almeno trascendentemente. E posto il valore di q, $\int \frac{dx}{r} \pm h =$

$\frac{-dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Sia $r = 2\sqrt{4aa - 2ax}$; adunque sarà $\int \frac{dx}{2\sqrt{4aa - 2ax}}$

$\pm h = \frac{-dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, ed integrando attualmente, ommessa la costante h, $\frac{-\sqrt{4aa - 2ax}}{2a} = \frac{-dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, e quadrando, e riducendo al comune denominatore, $4aadx^2 - 2axdx^2 - 2axdy^2 = 0$, cioè $dy = dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, equazione alla cicloide del num. 131. Capo V. Libro II.

In

In luogo del raggio, ci venga dato il co-raggio. Dunque $z = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, e posta istessamente $dy = qdx$, onde $ddy = dqdx$, $dy^2 = qqdx^2$, e fatte le sostituzioni in luogo di ddy, e di dy^2, sarà $z = \frac{dx^2 + qqdx^2}{-dqdx}$, cioè $\frac{dx}{z} = \frac{-dq}{1+qq}$, ed integrando, $\int \frac{dx}{z} \pm b = \int \frac{-dq}{1+qq}$; ma l'integrale dell'omogeneo di comparazione è arco di circolo; dunque se il co-raggio sarà in tal modo dato, che anche $\int \frac{dx}{z}$ sia arco circolare, e questi archi si corrispondano come numero a numero, avremo l'equazione ridotta alle prime differenze, ed espressa in quantità ordinarie.

Sia $z = 2\sqrt{2ax - xx}$, adunque sarà $\int \frac{dx}{2\sqrt{2ax - xx}} = \int \frac{-dq}{1+qq}$; ma l'integrale del primo membro è l'arco di circolo, la di cui tangente sia $\frac{\sqrt{2ax - xx}}{x}$, e del secondo è l'arco di circolo, la di cui tangente sia q, dunque sarà $\frac{\sqrt{2ax - xx}}{x} = q = \frac{dy}{dx}$, e però $dy = dx \sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, equazione alla stessa cicloide.

PRO-

PROBLEMA II.

65. *Dato il raggio osculatore in qualunque modo per la curva riferita all' asse, ritrovare la curva stessa.*

La formola del raggio osculatore, posto costante ds (elemento della curva) si è $\frac{dxds}{ddy}$, e però sarà l'equazione $r = \frac{dxds}{ddy}$. Chiamo t la tangente della curva, e p la sottotangente; sarà $\frac{yds}{dy} = t$, e differenziando nell'ipotesi di ds costante, $dt = \frac{dy^2 ds - ydsddy}{dy^2}$, cioè $ddy = \frac{dy^2 ds - dy^2 dt}{yds}$, onde fatta la sostituzione, sarà $r = \frac{ydxds^2}{dy^2 ds - dy^2 dt}$. Ma poichè si â $p = \frac{ydx}{dy}$, e $t = \frac{yds}{dy}$, sarà $dx = \frac{pdy}{y}$, $ds = \frac{tdy}{y}$; onde sostituiti questi valori nella equazione superiore, si averà $r = \frac{ptds}{tdy - ydt}$;

ma

ma $p = \sqrt{tt - yy}$, dunque $r = \frac{tds\sqrt{tt - yy}}{tdy - ydt}$, cioè

$$\frac{ds}{r} = \frac{tdy - ydt}{t\sqrt{tt - yy}}.$$

Il primo membro di quest' ultima equazione è in nostra mano, almeno trascendentemente, poichè r è una funzione di s; nel secondo poi facilmente si separano le indeterminate, se si faccia $q = \frac{y}{t}$, con che averassi la semplicissima equazione $\frac{ds}{r} = \frac{dq}{\sqrt{1 - qq}}$.

Se nella formola $r = \frac{ptds}{tdy - ydt}$ in luogo di t si avesse preso il valore $\sqrt{pp + yy}$, averebbesi ritrovato $r = \frac{\overline{pp + yy} \times ds}{pdy - ydp}$, e fatta $\frac{y}{p} = z$, l' equazione pure semplicissima $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1 + zz}$.

Le due quantità differenziali $\frac{dq}{\sqrt{1 - qq}}$, $\frac{dz}{1 + zz}$ sono l' espressione dell' elemento d' arco di circolo; quindi se l' integrale $\int \frac{ds}{r}$ sarà algebraico, o pure dipenderà

da'

da' logaritmi, o da quadrature più alte, la rettificazione delle ricercate curve, ed il valore del raggio osculatore supporrà la quadratura del circolo; ma all'opposto potrà l'uno, e l'altro esser algebraico, se l'integrale $\int \frac{ds}{r}$ convenga con una formola d'arco circolare.

Ritenuta una delle due equazioni, per esempio, la seconda $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1+zz}$; poichè $ds = \frac{tdy}{y} = \frac{dy}{y}\sqrt{pp+yy}$, e $p = \frac{y}{z}$, sarà $ds = \frac{dy}{z}\sqrt{1+zz}$, onde posto questo valore nell' equazione, averassi $dy = \frac{rzdz}{1+zz\sqrt{1+zz}}$.

Essendo $ds = \frac{dy}{z}\sqrt{1+zz}$, sarà anche ds^2, cioè $dx^2 + dy^2 = \frac{dy^2 + zzdy^2}{zz}$, e però $dx = \frac{dy}{z}$.

Il dato raggio osculatore r sia $= 1 + ss$; l'equazione $\frac{dz}{1+zz} = \frac{ds}{r}$ si muterà in questa $\frac{dz}{1+zz} = \frac{ds}{1+ss}$, da cui si ricava $z = s$, e però $r = 1 + zz$. Pongo questo valore nella equazione $dy = \frac{rzdz}{1+zz\sqrt{1+zz}}$, e sarà $dy = \frac{zdz}{\sqrt{1+zz}}$; ed integrando, ommessa la co-

eee stante,

ſtante, $y = \sqrt{1+zz}$, quindi $z = \sqrt{yy-1}$. Adunque perchè ô ritenuto $dx = \frac{dy}{z}$, ſarà finalmente $dx = \frac{dy}{\sqrt{yy-1}}$, equazione della ricercata curva nella ſuppoſizione aſſunta del raggio oſculatore. La coſtruzione dipende dalla quadratura dell'iperbola.

Prendo la formola del raggio oſculatore $\frac{ds}{r} = \frac{dsddy - dydds}{dxds}$, in cui neſſuna fluſſione prima è coſtante. Diſpongo l'equazione così: $\frac{dy}{dx} \times \overline{\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds}} = \frac{ds}{r}$.

L'integrale di $\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds}$ ſi è $l\,dy - l\,ds$, che pongo $= lp$; dunque ſarà $\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds} = \frac{dp}{p}$, e $\frac{dy}{ds} = p$, e però ſarà l'equazione $\frac{ds}{r} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dp}{p}$; ma $p = \frac{dy}{ds}$, e $\frac{dy^2}{pp} = ds^2 = dx^2 + dy^2$, dunque $dx = \frac{dy\sqrt{1-pp}}{p}$; e ſoſtituendo queſto valore, ſarà $\frac{ds}{r} = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}}$, equazione in cui ſono ſeparate le variabili, e che per conſeguenza può trattarſi con la maniera di ſopra uſata.

Sia

Sia la formola del raggio osculatore $\frac{ds}{r} = -\frac{dydds}{dsdx}$, in cui è costante dy. Pongo $ds = qdy$, e però $dds = dqdy$, dunque $\frac{ds}{r} = -\frac{dy^2 dq}{dsdx}$; ma $ds^2 = dx^2 + dy^2 = qqdy^2$, onde ricavasi $dx = dy\sqrt{qq-1}$, e $dxds = qdy^2\sqrt{qq-1}$. Fatta pertanto questa sostituzione, sarà $\frac{ds}{r} = \frac{-dq}{q\sqrt{qq-1}}$.

Sia finalmente la formola del raggio osculatore $\frac{ds}{r} = \frac{-dxddy}{ds^2}$, in cui è costante dx. Pongo $z = \frac{dx}{dy}$, e però $dz = \frac{-dxddy}{dy^2}$; dunque $\frac{ds}{r} = \frac{dy^2 dz}{ds^2}$, ma $dx = zdy$, e $ds^2 = dx^2 + dy^2 = zzdy^2 + dy^2$, quindi $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1+zz}$.

In qualunque modo adunque si operi, l'integrale $\int\frac{ds}{r}$ sarà sempre riferito alla rettificazione, o quadratura del circolo.

Sia dato in qualunque maniera per la curva il co-raggio, che chiamo $= u$. Prendo una delle tre for-

mole ſuperiori, per eſempio quella, in cui è ſtata preſa coſtante dy, cioè $\frac{ds}{r} = \frac{-dq}{q\sqrt{qq-1}}$, dove è ſtato poſto $ds = qdy$. Sarà il raggio $r = \frac{uds}{dx}$, e poſto queſto valore nella formola, averemo $\frac{ds}{u} = \frac{-dsdq}{qdx\sqrt{qq-1}}$; ma $ds = qdy$, e $dx = dy\sqrt{qq-1}$, quindi fatte le ſoſtituzioni, ſarà $\frac{ds}{u} = \frac{-dq}{qq-1}$; ma u è data per s, adunque ec.

Qui ſi oſſervi, che ſiccome la ſommatoria $\int\frac{ds}{r}$ è eguale all'eſpreſſione d'arco circolare, così l'altra ſommatoria $\int\frac{ds}{u}$ viene riferita alla quadratura dell' iperbola, o ſia a' logaritmi.

66. Con ſimili, o poco diverſi artifizj e maniere ſi potranno ridurre a' ſecondi differenziali molte equazioni, o formole eſpreſſe con differenziali terzi, quarti ec. Ed in primo luogo il metodo del num. 49. ſi può eſtendere (dentro certe limitazioni però) alle equazioni differenziali del terzo ordine, del quarto, del quinto ec., vale a dire ſi ridurranno ſempre al primo ordine le equazioni del terzo, purchè l'una, e l'altra

l'altra delle variabili finite x, y in esse manchi; si ridurranno quelle del quarto, purchè oltre l'una, e l'altra delle due variabili finite x, y, in esse manchi l'una, o l'altra delle prime flussioni dx, dy con le rispettive funzioni; si ridurranno quelle del quinto, purchè in esse manchino ambe le variabili finite, ed ambe le prime loro flussioni; quelle del sesto, purchè oltre tutto ciò, manchi l'una, o l'altra delle flussioni seconde, e così vadasi discorrendo.

Sia l'equazione $dxdddy + dx^2 ddy = dx^4 + dy^4$, in cui è stata presa costante dx. Faccio al solito $pdx = dy$, e però $dpdx = ddy$, $ddpdx = dddy$; fatte pertanto le sostituzioni, si averà $dx^2 ddp + dx^3 dp = dx^4 + dy^4$; ma $dy^4 = p^4 dx^4$, dunque sarà $ddp + dxdp = dx^2 + p^4 dx^2$, equazione ridotta al secondo ordine. Pongo in oltre $qdx = dp$, ritenendo per costante dx, e però $dqdx = ddp$, onde sostituendo, sarà $dqdx + dpdx = dx^2 + p^4 dx^2$, cioè $dq + dp = dx + p^4 dx$; ma $dx = \frac{dp}{q}$, dunque $dq + dp = \frac{dp}{q} + \frac{p^4 dp}{q}$, equazione ridotta alle prime differenze.

Sia l'equazione differenziale del quarto ordine $d^4y + dxdddy - dx^2 ddy = 0$, in cui sia costante dx. Faccio adunque $pdx = dy$, e però $dpdx = ddy$, e $ddpdx = dddy$, e $dddpdx = d^4y$; fatte però le sostituzioni,

ni, si averà $dddp + dxddp - dx^2 dp = 0$, equazione, che è il caso del sopra posto esempio, onde si sa maneggiare, e facilmente si ridurrà alle prime flussioni.

Il metodo del num. 49. ritrovato già tempo fa dal Sig. Conte Jacopo Riccati prima d'ora mi era noto; ma la qui sopra posta estensione, siccome il problema secondo inverso de' raggi osculatori ora solamente gli ô appresi, che mi è venuto alle mani il secondo Tomo de' commentarj dello Instituto di Bologna; e certamente troppo tardi per me, perchè ritrovandomi già al termine dell'impressione di questa mia fatica, non sono più in tempo di prevalermi d'altre dottissime Dissertazioni, e del P. Vincenzo Riccati figlio del suddetto Sig. Conte Jacopo, e del Sig. Gabriello Manfredi ivi inserite. Basterà adunque averle indicate al Lettore, acciò voglia trarne profitto.

67. Veduta la suddetta estensione del metodo del num. 49., passo ad altre equazioni, e ad altri ripieghi; e però sia l'equazione $pdyddy^2 = pdx^2 dddy - 2pdxddxddy - dpdx^2 ddy$, in cui la p è in qualunque modo data per x, ed y, ed è stato preso per costante l'elemento ds della curva. Poichè ds è costante, sarà $dxddx = - dyddy$, onde sostituito questo valore in luogo di $dxddx$, sarà $pdyddy^2 = pdx^2 dddy + 2pdyddy^2 - dpdx^2 ddy$, cioè cancellato ciò, che si elide, $dpdx^2 ddy = pdyddy^2 + pdx^2 dddy$,

O

o sia $\frac{dp}{p} = \frac{dyddy}{dx^2} + \frac{dddy}{ddy}$, e posto in luogo di $dyddy$ il valore $-dxddx$, sarà $\frac{dp}{p} = -\frac{ddx}{dx} + \frac{dddy}{ddy}$, e finalmente integrando con i logaritmi, $lp = lddy - ldx - lds$, essendo ds costante, e però $p = \frac{ddy}{dxds}$, equazione ridotta alle seconde differenze.

Sia l'equazione $hdzdddx - 3hddzddx - dhdzddx = 0$, in cui la h è in qualunque modo data per x, e z. Si finga la seguente equazione $h^m dz^n ddx^r =$ ad una costante (le m, n, r sono potestà incognite da determinarsi nel progresso), dunque differenziando, sarà $rh^m dz^n ddx^{r-1} dddx + nh^m ddx^r dz^{n-1} ddz + mh^{m-1} dhdz^n ddx^r = 0$, la quale divisa per $h^{m-1} dz^{n-1} ddx^{r-1}$ si riduce ad essere $rhdzdddx + nhddxddz + mdhdzddx = 0$. Paragonata questa equazione termine per termine con la principale proposta, si â $r = 1$, $n = -3$, $m = -1$, adunque in vece dell' equazione finta $h^m dz^n ddx^r =$ ad una costante, averemo la vera $\frac{ddx}{hdz^3} =$ ad una costante, che è l'integrale della proposta.

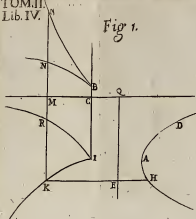
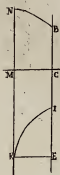
Per via di logaritmi ancora si può ottenere la stessa integrazione. Ripiglio l'equazione $hdzdddx - 3hddzddx - dhdzddx = 0$: divido per $hdzddx$, sarà

rà $\frac{dddx}{ddx} - \frac{3ddz}{dz} - \frac{dh}{h} = 0$, ed integrando, $lddx - ldz^3 - lh =$ ad un logaritmo coſtante, dunque $\frac{ddx}{hdz^3} =$ ad una coſtante.

Finirò queſte Inſtituzioni con una avvertenza, ed è, che deve l'accorto Analiſta procurare con tutta l'induſtria di ſcanſare nella ſoluzione de' Problemi le ſeconde, e molto più le ulteriori fluſſioni per mezzo di certi ripieghi, che naſcono opportunamente ſul fatto. Tali artificj ſi vedono adoperati da illuſtri Matematici ne' Problemi delle *Curve Elaſtiche*, *Catenarie*, *Velarie*, in quello degl'*Iſoperimetri*, ed in altri, le ſoluzioni de' quali pubblicate sì negli Atti di Lipſia, come in altre opere, ſi potranno leggere, a fine di acquiſtare quella avvedutezza e deſtrezza, che è neceſſaria.

F I N E.

TOMO SEGONDO.

ERRORI		CORREZIONI
Pag. 432 lin. 11	giungne	giunge
Pag. 435 lin. 22	lineeta	lineetta
Pag. 511 lin. 9	equaaione	equazione
Pag. 515 lin. 14	*NOPQR*	*NOPQMR*
Pag. 587 lin. 17	divegenti	divergenti
Pag. 697 lin. 1	queſte frazioni	queſta frazione
Pag. 727 lin. 13) lin. 20)	*DCEB*	*DECB*
Pag. 745 lin. 14	*TS*	*TR*
Pag. 790 lin. 17	della	dalla
Pag. 795 lin. ult.	$\frac{-dy\sqrt{aa-yy}}{9}$	$\frac{-dy\sqrt{aa-yy}}{y}$
Pag. 844 lin. 10	incogoita	incognita
Pag. 901 lin. 10	$\frac{-apdy-fdp}{ep+m}$	$\frac{-apdp-fdp}{ep+m}$
Pag. 924 lin. 5	$\times\frac{-z^3dx}{x\frac{9}{2}}$	$\times\frac{-z^3dx}{x^{\frac{9}{2}}}$
Pag 929 lin. 1	$+b^3xxdz$	$+b^3xxdx$
Pag. 939 lin. 2	dottiffimo	dottiſſimo

TOM.II.
Lib.IV.
Tunica
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.